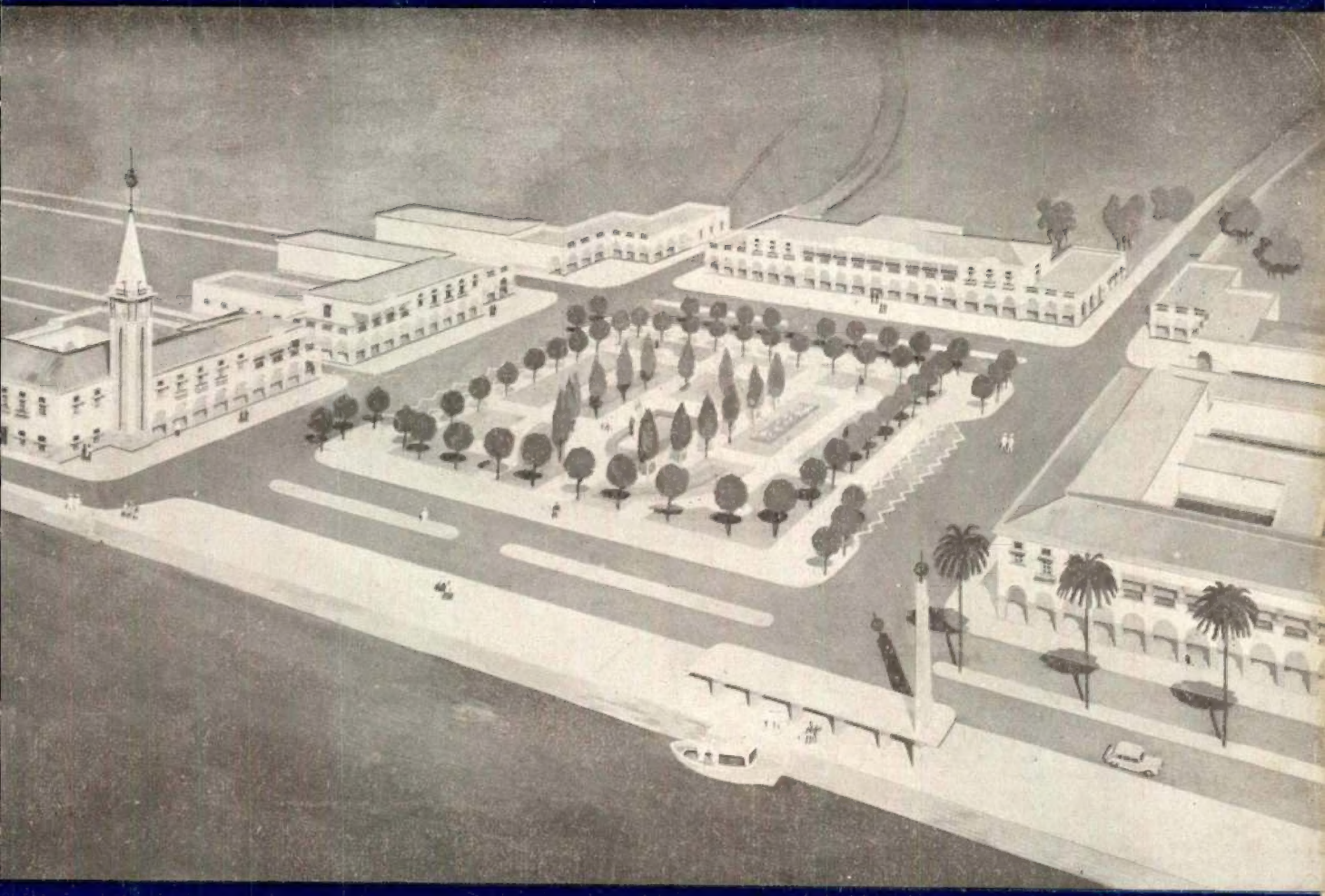
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA

DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 151-Dezembro-1944

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

SECIL

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMÉRCIO, 56, 3.º
LISBOA

Granulados de mármores
para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

Soc. Portuguesa CADAN

Rua D. Estefânia, 42
Telefone 47812 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO:
PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS
REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

NÚMERO
151
Dezembro — 1944

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N./ TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
ADMINISTRADOR
ANTÓNIO BUSTORFF
BIBLIOTECÁRIO
FERNANDO MANZANARES ABECASIS
CORPO REDACTORIAL
J. M. Correia Vitorino
Duarte Bello
Fernando Blanqui Teixeira
Manuel Franco Falcão
João Barata Galvão
José Maria Seguro

NÚMERO AVULSO 6$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	16$00	30$00	58$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	40$00	70$00
Estrangeiro...	—	45$00	80$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ESTUD. DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Praça do pôrto de Luanda

		Págs.
A Técnica, a Economia e o Progresso		47
Problemas auxiliares no cálculo variacional. Lugares geométricos generalizados	Dr. Mira Fernandes	53
Unidades logarítmicas	Eng.º Paulo de Brito Aranha	64
Uma simplificação ao traçado das linhas de influência de certos efeitos em arcos encastrados	Eng.º Vieira Barbosa	82
Fiscalização das Obras Públicas	Eng.º Horácio de Moura	96
Um conceito de probabilidade	Eng.º José Pinto Machado	109
Rádio-Sondas	C. Barradas da Silva	113
A exposição da construção nas Colónias Portuguesas realizada no Instituto Superior Técnico		120
Do Mundo Técnico		127
Notas bibliográficas		129
Bibliografia		131
Publicações recebidas		131

Standard Electrica

S. A. R. L.

Rua Augusta, 27 — Telefones 2 3111/12/13

LISBOA

Associada da

International Telephone and Telegraph Corporation

e das seguintes companhias:

Estados Unidos da América do Norte

— International Standard Electric Corporation
— Federal Telephone and Radio Corporation
— Commercial Cable Company, The
— Commercial Pacific Cable Company
— Mackay Radio And Telegraph Company
— All America Cables And Radio, Inc.
— Cuban All American Cables, Inc. The
— International Telephone Building Corp.

Grã-Bretanha e Império

— Standard Telephones And Cables, Ltd.
— Kolster-Brandes, Ltd.
— Creed And Company, Ltd.
— International Marine Radio Company, Ltd.
— Standard Telephones And Cables Pty, Ltd.
— New-Zeland Electric Totalisators, Ltd.

Bélgica

— Bell Telephone Manufacturing Company

Dinamarca

— Standard Electric Aktieselskab

Espanha

— Compañia Telefónica Nacional de España
— Standard Electrica, S. A.

França

— Compagnie Générale de Constructions Téléphoniques
— Le Matériel Téléphonique
— Lignes Télégraphiques et Téléphoniques

Holanda

— Nederlandsche Standard Electric Maatschappij

Iugoslávia

— Jugoslavensko Standard Electric Company Akcionarno Drustvo
— Teleoptik A. D.

Itália

— Fabrica Apparecchiature Per Communicazzioni Electtriche
— Societa Finanziaria Elettrotelefonica
— Societa Italiana Reti Telefoniche Interurbane

Noruega

— Standard Telefon-og Kabelfabrik A/S

Polónia

— Standard Electric Company w. Polsce Sp. z O. O.

Romênia

— Standard Fabrica de Telefoane si Radio S. A.

Suécia

— Aktiebolaget Standard Radiofabrik
— L. M. Ericsson Telephone Company, Limited

Suíça

— Standard Telephone et Radio S. A.

Argentina

— United River Plate Telephone Company, Limited
— Compañia Internacional de Radio
— Compañia Telefónica Argentina
— Compañia Telegráfico-Telefónica Comercial
— Compañia Telegráfico-Telefónica Del Plata
— Sociedad Anónima Radio Argentina
— Compañia Standard Electric Argentina

Bolívia

— Compañia Internacional de Radio Boliviana

Brasil

— Standard Electrica S. A.
— Companhia Rádio Internacional do Brasil
— Companhia Telefónica Paranaense S. A.
— Companhia Telefónica Rio Grandense

Chile

— Compañia de Teléfonos de Chile
— Compañia Internacional de Radio, S. A.
— Compañia Standard Electric, S. A. C.

Cuba

— Cuban Telephone Company
— Cuban American Telephone and Telegraph Company

México

— Mexican Telephone and Telegraph Company

Peru

— Compañia Peruana de Telefónos Limitada

Pôrto Rico

— Porto Rico Telephone Company
— Radio Corporation of Porto Rico

Uruguai

— Montevideo Telephone Company, Limited

China

— Shanghai Telephone Company, Federal, Inc. U. S. A.

Alemanha

— Ferdinand Schuchhardt Berliner Fernsprech-Und Telegraphenwerk Aktiengesellschaft
— Lorenz, C. A. G. And Subsidiaries
— Mix & Genest Aktiengesellschaft And Subsidiaries
— Suddeutsche Apparatefabrik Gesellschaft M. B. H.
— Telephonfabrik Berliner A. G. And Subsidiaries
— Vereinigte Telefon-Und Telegrafen-Werk Aktien-Gesellschaft

Húngria

— Dial Telefonkereskedelmi Részvény Társaság

Tchecoslováquia

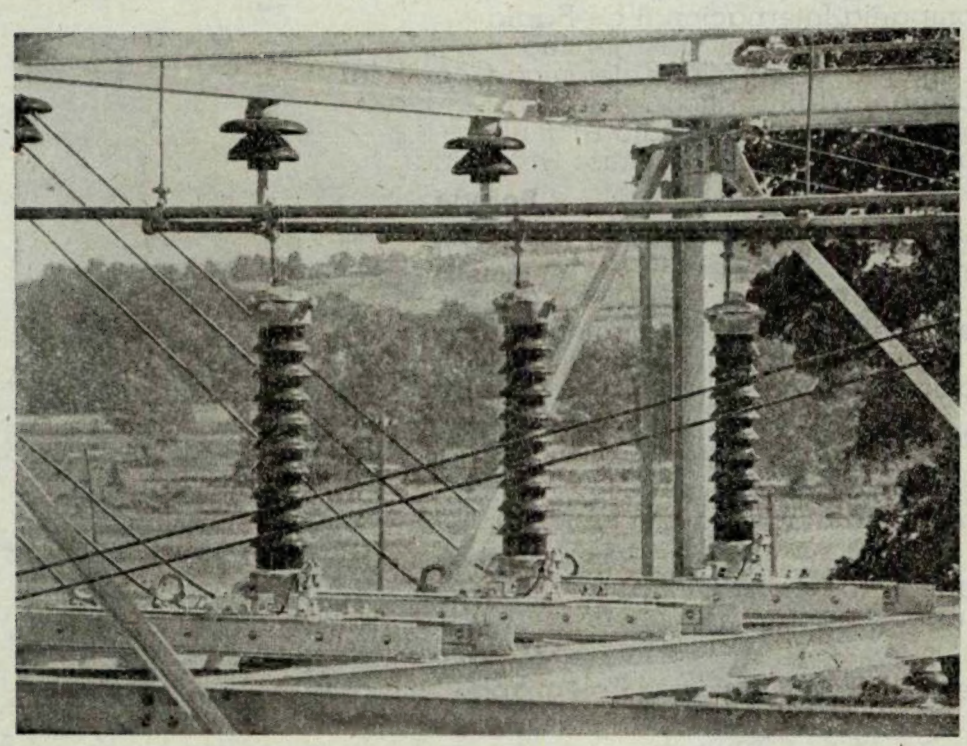
— Standard Electric Doms A Spolecnost

Japão

— Nippon Electric Company, Ltd.
— Sumitomo Electric Industries, Limited

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Aparelhos de protecção «THYRITE» contra sobretensões

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadura eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

NESTES TEMPOS DIFÍCEIS

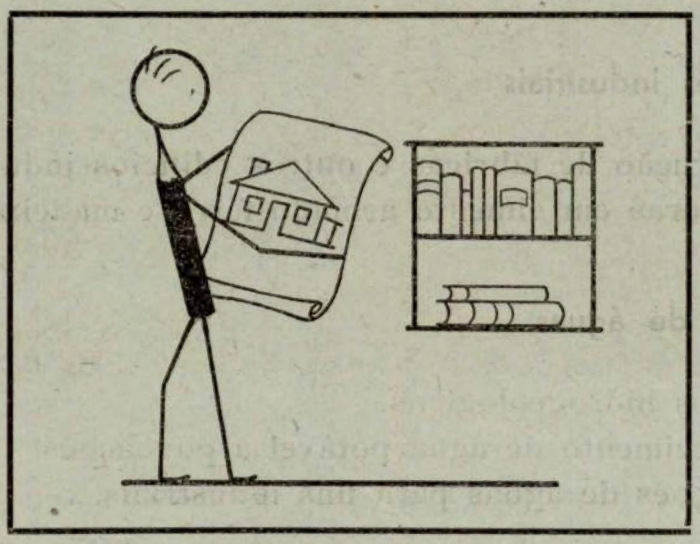
são irregulares e obtidas com muitos esforços as remessas de

APARELHOS DE PRECISÃO E ACESSÓRIOS

PAPELARIA E LIVRARIA TÉCNICAS

para

Engenheiros	Topógrafos	Escolas	Escritórios
Arquitectos	Desenhadores	Laboratórios	Repartições
Construtores	Estudantes	Fábricas	Observatórios



PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA

R. Eugénio dos Santos, 75 / LISBOA / Telef. 24314-15

Até que a normalidade volte, há que comprar a ferramenta de trabalho ou o objecto útil antes que se esgotem; é essencial

APROVEITAR AS OCASIÕES

Sociedade Nacional de Estudos e Projectos, Ltd.ª

TRABALHOS DE ENGENHARIA CIVIL E DE MINAS

Construções civis e de cimento armado

Inscrita nas principais Câmaras Municipais do País.
Projecto e construção de qualquer tipo de edifício.
Orçamentos grátis.

Construções industriais

Construção de fábricas e outros edifícios industriais.
Estruturas em cimento armado ferro e madeira.

Captações de águas

Estudos hidrogeológicos.
Abastecimento de água potável a povoações.
Captações de águas para fins industriais.

Indústria Mineira

Direcções Técnicas.
Trabalhos de pesquiza e de prospecção.
Planos de lavra.
Projecto e construções de cavaletes de extracção.
Oficinas de preparação de minérios.

ESCRITÓRIO

Rua da Madalena, 80 - 5.º Dir.

LISBOA

TÉCNICA

FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
DIRECTOR

ANO XX - N.º 151 DEZEMBRO 1944

A TÉCNICA, A ECONOMIA E O PROGRESSO

Ao iniciarmos nesta revista a publicação de artigos versando assuntos de carácter geral tivemos nìtidamente a consciência das dificuldades que haveríamos de vencer para conseguir dar-lhe seqüência durante um período suficientemente largo. A verdade é que contamos já com várias promessas de colaboração, mas, como geralmente acontece, os múltiplos afazeres de tôdas as pessoas que assim se prestaram amàvelmente a colaborar nesta tarefa que se classificou de urgentíssima, não lhes permitiram por enquanto distrair dêles as suas atenções.

Não queremos, no entanto, interromper apenas por um número, a série iniciada para não introduzir uma descontinuïdade, de influências bastante desagradáveis, objectiva e subjectivamente.

Procura-se, como já foi notado, focar questões consideradas de importância fundamental para a vida profisssional do engenheiro, diferentes das que nos são ensinadas nas Escolas, de carácter puramente técnico (se é que na realidade a técnica se pode limitar taxativamente).

Em fase da crise geral a que vimos assistindo, indicação insofismável da falência de sistemas, ou simultâneamente de sistemas e homens, a técnica, para ter um desenvolvimento verdadeiramente útil e de interêsse social, carece de uma orientação consciente. Não quere isto dizer que se lhe procure limitar o âmbito de trabalho — todo o progresso é susceptível dum bom aproveitamento — nem que se procure impor-lhe um campo de variação demasiado estreito, antes se deve basear nessa orientação um trabalho conduzido com uma visão bastante larga e que não se contenha num campo exclusivista como tantas vezes se situa.

Várias vezes se tem tratado dêstes problemas entre nós e lá fora. Em relação a êles, achámos de grande interêsse apresentar um extracto duma conferência realizada o ano passado em Espanha pelo engenheiro Miguel Garau, de oportunidade não deminuída, e que foi publicada na revista Dyna. O seu eco chegou à Argentina, tendo sido completamente reproduzida no órgão oficial do Centro de Engenheiros de Córdova «El Ingeniero». É desnecessário, pois, insistir na importância do que a seguir se transcreve.

A Técnica e o desenvolvimento da colectividade humana

É indubitável que no desenvolvimento da colectividade humana interveio grande número de factores da maior diversidade, como são os religiosos, os filosóficos, os políticos, os literários, etc., e não é menos certo que em todos êles exerceu grande influência o desenvolvimento que ia adquirindo a técnica da produção, podendo afirmar-se que esta constitue uma das principais bases em que se apoia a civilização. Para convencer-nos do facto basta citar

apenas um dos seus produtos, como é a invenção da imprensa.

Se o propósito da civilização não é o progresso das ciências e das máquinas, mas sim o progresso do homem, e para que êste possa progredir é preciso satisfazer as suas necessidades crescentes, tanto de ordem material como espiritual, e se tanto as primeiras como as segundas só podem ser satisfeitas através de objectos materiais, é indispensável uma produção crescente para o desenvolvimento conveniente da humanidade.

É por êste motivo que a técnica da produção deve figurar no primeiro plano da nossa atenção porque constitue a base do edifício que nos propomos levantar.

Porém esta base tem de ser tal que exige à técnica da produção várias condições, sendo a primeira delas que essa produção seja obtida de forma económica, isto é, com o mínimo custo, ou seja, com o mínimo esfôrço humano, condição que será demonstrada com maior amplitude mais adiante.

Cada uma destas fases tem exigido organizações sociais e políticas distintas e na sua evolução converteram o homem, de um ser independente em relação aos seus semelhantes e escravo em relação à natureza, num ser quási senhor desta e cada vez com menos liberdade em relação aos demais homens. E sob o ponto de vista económico, de um ser autárquico em outro que já não pode bastar-se a si mesmo.

. . . . . .

Objecto e meios da técnica

À técnica exige-se a obtenção da produção com o mínimo custo, sem pensar em nenhuma consideração de ordem económica, mas sim com o objectivo de que a necessidade de trabalhar para viver seja cada vez menos custosa e o homem se possa ir emancipando do seu trabalho físico ao mesmo tempo que intensifica o seu trabalho intelectual. É esta uma condição precisa desde o momento em que aquela perfeição espiritual que procuramos, esteja em relação inversa com o tempo que dedicamos à produção dos bens materiais que as nossas necessidades crescentes exigem.

. . . . . .

A técnica filha do cérebro

Por ser a técnica filha do cérebro, é êste o maior capital que possuímos; é o campo mais fértil de todos os que se nos oferecem para aplicar com fruto o nosso trabalho, por cujo motivo creio que constitue um grande êrro considerar que o dinheiro e o tempo invertido na construção ou perfeição duma máquina rende, sob o ponto de vista económico-social muito mais que o invertido em aperfeiçoar um espírito ou um cérebro. E isto é asssim porquanto tôdas as riquezas que podemos obter mediante o uso da máquina, se malogram quando não as sabemos usar devidamente. A maior parte das máquinas do mundo inteiro, dedicadas hoje em dia para matar e destruir, é uma boa prova do que se afirma.

Perigos do desequilíbrio entre o progresso técnico e cultural

Para que a técnica possa proporcionar-nos os frutos devidos é preciso que a colectividade possua um grau suficiente de cultura e moral e, como conseqüência disso, qualquer incremento no progresso técnico deve ser precedido por maiores progressos em tôdas as demais ordens. Por isto, o progresso científico e técnico apresentam-nos a sua parte boa e a sua parte má, o seu pró e o seu contra, pelo que, ao dizer que êsse progresso técnico constitue uma das bases da civilização, temos de entender que é absolutamente necessário, mas não suficiente e que representará para a humanidade um grande benefício sòmente no caso em que a religião, a moral e a cultura geral nos ponham em condições apropriadas para o receber.

A excessiva atenção que os nossos antepassados puseram nos problemas da técnica e da produção, em relação à perfeição espiritual dos povos, trouxe-nos a série de desgraças que estamos sofrendo.

. . . . . .

Papel da técnica na civilização

Fica bem definido o papel que a técnica desempenha na civilização; por um lado proporciona-nos os materiais necessários para a satisfação das nossas crescentes necessidades e, por outro, põe cada vez maior quantidade de tempo à nossa disposição para que o possamos dedicar à perfeição do homem, considerando o primeiro aspecto como um meio para alcançar o fim anteriormente indicado. Por êste motivo, se pedimos à técnica cada vez uma maior quantidade de produção e menos trabalho humano, não é para que nos permitamos folgar e embrutecer-nos, mas sim para que possamos adquirir maior cultura e contribuir para o progresso em tôdas as demais ordens. O indivíduo que logrou emancipar-se da necessidade de trabalhar para viver, e mais ainda aquêle que nasceu com êste privilégio e não utilize o seu tempo disponível no sentido anteriormente indicado, deixa de cumprir um dos seus deveres para com a Humanidade. «Estamos longe — diz Carrel — de ter resolvido êste importantíssimo problema da falta de ocupação criado pela prosperidade, a máquina moderna ou o desemprêgo. Impondo ao homem a desocupação, a civilização científica causou-lhe um gravíssimo dano. Somos incapazes de lutar contra as conseqüências da indolência e da irresponsabilidade, como somos incapazes de lutar contra o cancro e as doenças mentais».

. . . . . .

Desprêzo pela ciência económica

Temos lido e ouvido uma infinidade de vezes que o fenómeno económico escapa a tôda a investigação, porque tem por base o factor psicológico, manifestando-se êste com tal anarquia que não existe a possibilidade de encontrar a lei que o regula. Como conseqüência desta afirmação, em lugar de investigar as verdadeiras leis económicas, confeccionou-se uma série de doutrinas que constituem hoje a maior parte dos conhecimentos que compreende a chamada Economia Política, abundando até agora o critério dos fisiocratas expresso na célebre frase «laisser faire, laisser passer». Negou-se a esta ciência económica a existência de leis naturais e portanto universais, e desviou-se a atenção dos investigadores para o empirismo, sendo produto dêste a maior parte de sistemas que, havendo sido considerados por algum tempo como infalíveis, nos coube a desgraça de os ter visto fracassar um por um. Não obstante, não devemos levar o pèssimismo até ao extremo de considerar inútil todo o trabalho a favor desta ciência, mas sim, pelo contrário, os progressos conseguidos nos últimos tempos têm sido de considerar e, graças a êles, possuímos sólidas bases para levantar êste edifício. Porém, falta-nos uma técnica económica que nos permita obter a utilidade devida ao esfôrço utilizado.

Cremos que entre esta e as demais ciências não existe a diferença que alguns supõem, pelo que o método para a sua investigação e estudo não tem nenhuma necessidade de sair das normas gerais aplicadas a outros campos com brilhantes êxitos. Os fenómenos físicos, químicos e mecânicos, por exemplo, produzem-se sem excepção sob a influência de certas leis universais, cujo estudo constitue o objecto das respectivas ciências. Teòricamente aquêles fenómenos teriam que desenvolver-se seguindo exactamente a respectiva lei, mas na realidade isso não acontece em virtude da acção de outras causas perturbadoras, cuja influência se traduz num desvio da trajectória determinada pela lei natural.

. . . . . .

Pois bem, aos fenómenos económicos acontece exactamente o mesmo, todos seguem a sua lei natural e todos estão submetidos à influência de causas perturbadoras, com a única diferença de que, em geral, no campo da Economia a influência dêste factor perturbador é tão grande que muitas vezes nos oculta por completo as condições da lei natural.

. . . . . .

Métodos da ciência económica

Nesta como em tôdas as ciências sòmente existem dois métodos para o seu estudo e

investigação: o dedutivo e o indutivo. Êste último aplicado brilhantemente na maioria delas, proporciona-nos para a Economia resultados muito confusos e progressos muito lentos, devido principalmente à dificuldade de poder reproduzir os fenómenos que se nos apresentam.

Para conseguir vislumbrar uma tendência necessitam-se estudos que duram dezenas de anos e nem sempre se consegue o resultado desejado. E sendo a principal base do método indutivo a Estatística, resulta perigosíssima a interpretação dos seus resultados, porque neles está sempre incluída a influência exercida pelo factor perturbador.

. . . . . .

A técnica e a economia

Se a técnica da produção tem por objectivo proporcionar-nos cada vez maior quantidade de bens conseguidos com menos trabalho humano, a Economia há-de ensinar-nos a realizar a sua distribuïção equitativa, e por ser a sua utilização o objectivo que além daquele desejamos atingir, é evidente que se devem evitar as perdas que suporia a não utilização dêsses bens, pelo que, o primeiro princípio económico, que podemos considerar como fundamental, e que pela sua evidência constitue antes um axioma, é a igualdade entre a produção e o consumo. A dedução diz-nos que esta igualdade *deve existir;* a indução demonstrou-nos que *não existe.* A Economia dirigida deve orientar-se para destruir todos os obstáculos que se opõem à verificação da igualdade citada. Para produzir necessita-se de tempo, do mesmo modo que para consumir. Se a produção tem de ir aumentando ao mesmo tempo que o seu consumo, é preciso que na primeira se inverta cada vez menos tempo a-fim-de a humanidade dispor cada vez mais dêle para o dedicar ao consumo. Com efeito, possuem maior capacidade de consumo aquêles que menos tempo têm de dedicar ao trabalho para viver e, pelo contrário, têm uma capacidade de consumo ínfima os indivíduos que dedicam a maior parte do seu tempo aos afazeres da produção. É freqüente entre profissionais e homens de negócios ouvir as seguintes exclamações: não tenho tempo para ler, para estudar, para ir aos concertos, para viajar, etc.

Temos visto como, sem sairmos do campo da Economia, se chega à mesma conclusão assinalada anteriormente, ou seja, para conseguir o desenvolvimento do progresso geral é preciso que a técnica nos proporcione o meio de deminuir o tempo de trabalho dedicado à produção, procurando assim aumentar o disponível para o consumo, com o que a Economia tem cumprida a sua missão. Do modo de utilizar aquêle tempo destinado ao consumo depende tudo o mais, especialmente a orientação da humanidade para o materialismo que origina a sua decadência ou para o espiritualismo que a eleva.

A realidade demonstrou completamente a missão cumprida pela técnica que permitiu reduzir o trabalho em geral às 8 horas diárias como máximo e sem dúvida alguma ter-se-ia podido reduzir mais ainda, se a técnica económica tivesse dado o seu máximo rendimento e a produção tivesse alcançado a devida utilidade.

Baseando-nos naquela igualdade entre a produção e o consumo, vimos que para a realizar é indispensável a técnica da produção conseguir aumentos constantes daquela, invertendo menor quantidade de trabalho humano, o que equivale a uma redução constante do preço de custo. Esta redução é, pois, fundamental para conseguir riqueza, e por êste motivo contribue mais o técnico, que consegue deminuir o citado custo da produção, no progresso, sob todos os aspectos, que qualquer combinação financeira com o fim de conseguir variações no preço de venda; assim como também contribue aquêle muito mais em conseguir grande solidez para a economia nacional e para a estabilização da divisa que todos os recursos que a aplicação da economia dirigida nos pode proporcionar.

. . . . . .

As leis económicas opõem-se aos avanços muito rápidos do progresso material

É já do domínio geral que qualquer incremento do progresso técnico deixa, de

momento, braços à produção, e não é menos certo que, em geral, o mesmo progresso cria mais possibilidades de ocupação; o facto, ao mesmo tempo que permite absorver a mão de obra eliminada da produção, torna possível a entrada na mesma daquela que os aumentos da população vão criando.

Em virtude dêste programa produzem-se trocas de mão de obra de umas para outras actividades que, se numa economia estacionária poderiam desaparecer, numa economia progressiva são inevitáveis. Estas correntes são formadas pelos indivíduos desempregados cujo número seria mínimo, mas nunca nulo, num sistema económico que pudesse desenvolver-se sem nenhum obstáculo. Haverá que contar-se, pois, sempre com elas e dar-lhes a solução devida, fácil de encontrar se tivermos em conta que não se trata de um problema de trabalho mas sim doutro de consumo.

Estas correntes de mão de obra que se transportam de um lugar para outro encontram-se com diversos obstáculos; uns, entram na categoria de fôrças perturbadoras, como são a especialidade, os idiomas, a ignorância, a falta de meios económicos para suportar os gastos que ocasionam, assim como também as medidas proïbitivas decretadas por algumas nações; outros, são conseqüência da lei natural cuja causa é a inércia própria das massas que se põem em movimento.

Em relação aos primeiros, com uma inteligente política de economia dirigida pode conseguir-se reduzi-los ao mínimo. Quanto mais acelerado fôr o progresso técnico, maiores serão aquelas correntes e maiores também as massas postas em movimento, assim como as fôrças de inércia que se terão de vencer. Como conseqüência, levará mais tempo o desempregado em normalizar a sua situação, resultando que se as acelerações do progresso material são demasiado rápidas em relação às mencionadas fôrças de inércia a vencer, o desemprêgo aumenta e os benefícios que esperávamos dêsse progresso convertem-se em prejuízos.

Por êste motivo não é de estranhar que os indivíduos arrastados por aquelas correntes maldigam as máquinas, visto que êles são incapazes de distinguir a diferença existente entre o progresso técnico que constitue a base para o nosso desenvolvimento e a sua aceleração demasiado rápida, ou seja, o excesso de maquinismo, que nos produz as indicadas perturbações cujas vítimas mais imediatas são os trabalhadores de tôdas as profissões.

Vemos, pois, como as acelerações do progresso técnico têm um limite imposto pelas próprias leis económicas naturais e, como conseqüência, o perigo existente num excesso de egoísmo que nos conduza a capitalizações intensas. As leis naturais estão dispostas de tal maneira que, se por um lado nos levam a conseguir constantes progressos na técnica da produção, opõem-se por outro a que estes se realizem com excessiva rapidez. Podemos aplicar aqui aquêle ditado que nos adverte: «não é por muito madrugar que amanhece mais cedo».

Razões que se opõem ao progresso cultural

Também, sem sairmos do campo da economia, podemos descobrir poderosas razões que se opõem ao progresso cultural. Uma delas consiste no falso conceito que temos de capital. Desde pequenos nos inculcam a idéia, por nós transformada em crença, de que o bem-estar se adquire com dinheiro; e com o desejo legítimo de viver melhor, dedicamos todos os esforços para o conseguir. Naturalmente o dinheiro em si não é capaz de proporcionar outro prazer além de contemplá-lo aos que gostam dêle e, portanto, o verdadeiro bem-estar provém do que com êle se pode adquirir e disfrutar. Ensinaram-nos também que para melhorar a nossa posição é preciso converter aquêle dinheiro em valores de renda, o que equivale a contribuir para o sustentamento ou criação de actividades económicas, como fábricas, vias de comunicação, vivendas, minas, explorações agrícolas, etc. Quando se emprega para sustentar ou criar Universidades e outros centros de cultura, é considerado como um acto de altruísmo, porque jàmais ocorreu que destas aplicações possa resultar algum proveito.

Como conseqüência, o mundo económico está organizado de tal forma que o único capital reprodutivo é o que representa elementos de produção material, tendo-se negado ao homem tal condição, para o considerar uma mercadoria sujeita, como as demais, à lei da oferta e da procura.

Qualquer emprêsa considera como obrigatório e absolutamente natural atender à manutenção e amortização dos capitais materiais que utiliza, anulando dêste modo o perigo do seu desaparecimento como conseqüência de acidente ou desgaste natural. Conduzem-se, pois, as emprêsas como se na sua actividade não contribuísse outro capital além do mencionado, esquecendo-se por completo o capital humano que coopera no seu trabalho. Para êste não existem amortizações, como se não estivesse exposto ao desaparecimento pela morte. A sua amortização fica ao cuidado do próprio indivíduo, e como a maior parte das vezes os seus pequenos ganhos não a permitem realizar, acaba por não ser devidamente atendida. Assim resulta que, realizando-se devidamente as amortizações do capital material, quando um elemento tem de ser substituído por outro como conseqüência do seu desgaste ou destruïção, nem a emprêsa nem a colectividade sofrem perda alguma; ao passo que ao morrer ou ficar inutilizado um produtor e ser substituído por outro, por não haver tido em conta aquela qualidade, se para a emprêsa não existe perda alguma, sofre-a evidentemente a colectividade.

A conseqüência do facto é, além disso, que o capital humano se acha em inferioridade de condições em relação ao capital material, e por êste motivo a tendência dirige-se sobretudo para êste último, procurando um maior rendimento, ficando por isso a formação do capital humano e o seu aperfeiçoamento sob a exclusiva influência do amor paterno.

. . . . . .

Índices da riqueza colectiva

É inútil que a estatística nos acuse cada vez mais aumentos de produção para deduzir que a nossa riqueza e bem-estar aumentam. Quando ela nos diga também o uso a que se destina, quere dizer, quando possa indicar-nos o seu valor social, poderemos formar um juízo claro sôbre esta questão. É inútil também que o técnico se esforce para obter máquinas e produtos cada vez mais perfeitos e económicos, se não tem a segurança de que serão destinados a usos convenientes. ¿Quantos esforços malogrados poderíamos registar como conseqüência duma má utilização dos bens conseguidos?

Soubemos criar o produtor, é tempo de nos preocuparmos de criar o bom consumidor e para isso é preciso reforçar e orientar convenientemente a educação e a instrução, e considerar que são o lar, as escolas e as universidades as principalmente encarregadas da formação dos consumidores que o desenvolvimento da civilização reclama, e as que em definitivo têm de procurar que todos aquêles produtos proporcionados pela técnica, adquiram o máximo valor social e se convertam em verdadeiros índices de riqueza. Se, como alguém disse, civilizar um povo é criar-lhe necessidades, será preciso que estas sejam encaminhadas para o interêsse colectivo com o firme propósito de conseguir como único fim o aperfeiçoamento espiritual do homem.

É por isso que, reflectindo sôbre os pecados cometidos, e dispostos a um sincero arrependimento com o desejo de ver restabelecida a paz a que todos aspiramos, será preciso as nações anteporem ao desejo da conquista de impérios que garantam a posse das matérias primas indispensáveis ao seu desenvolvimento industrial, a premente necessidade da conquista do Império da Cultura e da Moral, para o qual tôdas possuem espaço vital mais que suficiente sem sair do perímetro geográfico que as limita.

Problemas auxiliares no cálculo variacional
Lugares geométricos generalizados

PELO DOUTOR **MIRA FERNANDES**

Como é sabido, uma das maiores dificuldades do problema variacional é a averiguação de existência dum lugar geométrico minimizante dum certo integral definido, mesmo no caso em que o problema é *regular*. Lembremo-nos, por exemplo, das vicissitudes da análise de Riemann acêrca do problema de Dirichlet.

Uma das mais recentes e, talvez, a mais interessante maneira de obviar a essa dificuldade, é o recurso aos *lugares geométricos generalizados*, concebidos por L. C. Young (1) e largamente tratados, principalmente por êle e por E. J. Mc Shane (2). Não dispensa êsse recurso, pelo menos até agora, algumas restrições (graves, já direi porquê) na natureza dos lugares generalizados. Mas, ocupando-se a análise de Young e Mc Shane de problemas a que poderemos chamar de *primeira ordem,* pode mostrar-se que, *sem novas restrições,* a análise se generaliza a problemas de ordem superior. É êsse o intuito principal do meu dizer.

Antes, porém, de definir o *problema auxiliar* de Young e Mc Shane, convém, talvez, advertir que êle é um caso particular dum problema auxiliar mais geral, que pode formular-se, porventura, noutros domínios, que não apenas nos do cálculo variacional.

Em que consiste êsse problema geral? No seguinte:

Uma funcional $F(x)$ opera sôbre os elementos x duma classe S. Procura-se o elemento x da classe que confere à funcional uma certa propriedade (por exemplo, a de ser mínima, e êsse é o problema do cálculo das variações). Para mostrar a existência duma solução, amplia-se o domínio S da funcional, substituindo-o por uma classe S^x, mais extensa que S e possuindo propriedades *convenientes* que a classe S não tinha. (No problema que vamos tratar convém que a classe S^x seja totalmente compacta).

Com essas propriedades de S^x, mostra-se que existe um elemento x_o de S^x que confere à funcional $F(x)$ a propriedade desejada. Determinam-se as condições necessárias a que há-de satisfazer x_o, como conseqüência da propriedade possuída por $F(x_o)$. (Ser mínima, por exemplo). Formulando sôbre $F(x)$ certas hipóteses, verifica-se que as referidas condições implicam que o elemento x_o pertence, não só à classe generalizada S^x, mas à classe primitiva S.

Há aqui dois artifícios de estimativa. *Primeiro,* a substituïção da classe S por outra mais ampla S^x, onde o problema tenha uma solução determinável. *Segundo,* o condicionamento das propriedades de $F(x)$ de modo tal que a solução x_o, em S^x, pertença a S. O êxito do processo depende da compatibilidade entre a primitiva ampliação da classe e o posterior condicionamento da funcional.

Ora, pode acontecer que, para certos problemas, êste condicionamento conduza a soluções singulares. Por isso, eu acentuava há pouco, a gravidade do processo restritivo.

Vejamos agora quais são os conceitos fundamentais que presidem à definição dos lugares geométricos generalizados. O primeiro é o conceito abstracto de seqüência convergente.

Como é sabido, os problemas mais simples do cálculo variacional, no caso de uma

(1) L. C. Young — I, II, III e IV.
(2) E. J. Mc Shane — V, VI, VII e VIII.

linha ou no caso de uma superfície, têm em vista a determinação duma linha C, ou duma superfície S, pertencentes, cada uma delas, a uma certa classe e com certas condições de fronteira, de modo tal que uma dada funcional

$$L_C(f) = \int_C f(x, y, x', y')\, dt \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ou

$$L_S(f) = \iint_S f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \left\{ z = z(x, y) \right.$$

seja mínima.

Com as definições ordinárias de convergência, estas funcionais são geralmente discontínuas; mesmo no problema regular, são apenas semi-contínuas. Convém, por isso, adoptar, no espaço das curvas C, ou das superfícies S, uma topologia que torne aquelas funcionais automàticamente contínuas e que, ao mesmo tempo, simplifique o mais possível o problema da determinação duma sucessão convergente minimizante. Isso pode conseguir-se, adverte Mc Shane, dizendo que uma sucessão $\{C_n\}$ de curvas e uma sucessão $\{S_n\}$ de superfícies, das classes consideradas, *são convergentes quando o fôrem* as sucessões de números $\{L_{C_n}(f)\}$ e $\{L_{S_n}(f)\}$, para cada função f duma certa classe, que é, nos problemas ordinários, a classe das funções contínuas. Estabelece-se assim o que se chama uma topologia *fraca*.

Como se vê, a definição de convergência duma sucessão $\{C_n\}$, por exemplo, subordina-se à das sucessões numéricas dos valores das funcionais. Que funcionais? Precisamente aquelas que intervêm no problema das variações.

Ora, é fácil ver que o espaço topológico, assim definido, é um espaço *métrico;* mas não é *completo*. Selo-ia se, para cada sucessão $\{C_n\}$ de curvas tal que $\{L_{C_n}\}$ é convergente para cada integral L_C do cálculo das variações, pudéssemos afirmar a existência duma curva C_0 tal que $\{C_n\}$ tendesse para C_0. E o mesmo diremos no caso das superfícies. Mas isso não acontece.

Como remover a dificuldade? À custa dos lugares geométricos generalizados de L. C. Young, (curvas e superfícies).

Vamos ver como êles se definem, começando pelas superfícies.

Consideremos um domínio A do plano $x\,y$ e o integral

$$L_S(f) = \iint_A f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy\,,$$

onde f é uma função contínua dos seus cinco argumentos.

Seja E o conjunto de tôdas as funções contínuas $\varphi(p, q)$ e $M(\varphi)$ uma funcional, que faz corresponder um número real a cada elemento φ do conjunto E, e gozando das seguintes propriedades:

a) É *não negativa,* se φ fôr não negativa;

b) É *linear*: $M(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2) = a_1 M(\varphi_1) + a_2 M(\varphi_2)$

para todos os números reais a_1, a_2 e para cada par φ_1, φ_2 de elementos de E.

c) Satisfaz à condição $M(\varphi) = 1$, quando φ fôr a constante unidade. $M(\varphi)$ é, portanto, uma *média linear* (average).

Se $M(\varphi)$ depende dos valores dos parâmetros adicionais x e y, e se, para cada função contínua φ, dependendo só de p e q, o número $M(\varphi)$ que se obtém formando a média linear em x e y, fôr uma função mensurável de x e y, diremos que $M(\varphi)$ é mensurável. Isso dá-se, como mostrou Mc Shane e é o caso que nos interessa, quando, sendo φ função dos quatro argumentos x, y, p, q, ela fôr contínua em relação a todos êles.

Podemos agora dizer, com L. C. Young, que *uma superfície generalizada* é o sistema definido pelo seguinte par de elementos:

1 — Uma função real $z(x, y)$, absolutamente contínua no sentido de Tonelli, possuindo derivadas parciais quási por tôda a parte, no domínio A;

2 — Uma média linear $M(\varphi)$, definida nos pontos (x, y) do domínio A e mensurável em x, y, que opera sôbre qualquer função contínua $\varphi(p, q)$ e tal que, para quási todos os pontos do domínio, $M(p)$ e $M(q)$ são as componentes do vector grad z; isto é, $M(p) = p$, $M(q) = q$.

À função $z(x, y)$ chamaremos *padrão* [1] da superfície generalizada.

Se fôr S a superfície ordinária de equação $z = z(x, y)$, representaremos por S^x a respectiva superfície generalizada.

Nos problemas clássicos do cálculo das variações, a funcional

$$L_S(f) = \iint_A f(x, y, z, p\ q)\, dx\, dy$$

relativa a uma superfície ordinária S, calcula-se, se fôr $z = z(x, y)$ a equação da superfície S, substituindo em f a variável z por $z(x, y)$ e p e q pelas componentes do seu gradiente, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Se fôr $\overline{f}(x, y)$ a função de x e y que resulta dessa substituïção, será

$$L_S(f) = \iint_A \overline{f}(x, y)\, dx\, dy.$$

Como se calcula a funcional $L_{\overset{x}{S}}(f)$, relativa a uma superfície generalizada $\overset{x}{S}$?

Substituindo $\overline{f}(x, y)$ por $M(\varphi)$, sendo $\varphi = \varphi(p, q)$ o valor, no ponto (x, y), da função $\varphi(x, y, p, q)$ que se obtém quando, em $f(x, y, z, p, q)$ se substitue z pelo padrão $z(x, y)$ da superfície generalizada. Pelo que atrás se disse, a função $\overline{f}(x, y) = M(\varphi)$ assim obtida, será mensurável.

Como se vê, uma superfície ordinária S e a respectiva funcional $L_S(f)$ são casos particulares das definições anteriores; a média M consiste em substituir em f, para quási todos os valores de x e y no domínio A, as variáveis p e q pelas componentes do gradiente de $z(x, y)$.

Uma superfície generalizada S^x diz-se lipschitziana, com a constante K, se, em cada ponto (x, y), a média linear $M(\varphi)$ duma função arbitrária $\varphi(p, q)$ é independente dos valores tomados por φ fora dum círculo de raio K, cujo centro é a origem do plano p, q.

A análise inicial de L. C. Young, limita-se, já veremos porquê, às superfícies generalizadas lipschitzianas.

[1] Track.

Podemos agora dizer que uma seqüência $\{S_n^x\}$ de superfícies generalizadas converge quando a seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$ converge no sentido fraco; isto é, para cada função contínua $f(x, y, z, p, q)$.

Diz-se que a seqüência dos respectivos padrões é convergente, quando fôr *uniformemente* convergente a seqüência das suas funções $z(x, y)$, o que corresponde à definição usual de convergência de superfícies. E embora as duas definições sejam inicialmente distintas, mostra-se que, no caso lipschitziano, a convergência duma sucessão de superfícies generalizadas importa a convergência da sucessão dos respectivos padrões.

É tempo de averiguarmos agora qual é o motivo que nos leva a impôr, na análise inicial de Young, a restrição lipschitziana. Êsse motivo, como vamos ver, é a conveniência de que seja *compacto* o sistema das superfícies generalizadas.

Como se sabe, o espaço das funções contínuas, definidas no interior duma esfera fechada n-dimensional, é um espaço de Banach. As funções $f(x, y, z, p, q)$, que figuram no nosso problema, devem ser contínuas em todo o espaço a cinco dimensões. Podemos considerar cada elemento f definido por uma seqüência $\{f_n\}$, em que f_n é a função contínua, definida dentro duma esfera de raio n e de centro fixo, que coincide, dentro dessa esfera, com f.

L. C. Young considera, mais geralmente, um espaço cujos elementos f são definidos por seqüências $\{f_n\}$, sendo f_n um elemento dum espaço de Banach, variável possìvelmente com n.

Sendo $\|f_n\|$ a norma de f_n e $Q_n(f)$ o maior dos primeiros n números $\|f_i\|$, seja

$$Q(f) = \sum 2^{-n} \frac{Q_n(f)}{1 + Q_n(f)}.$$

Define-se a distância de dois elementos f e g do espaço considerado por $Q(f - g)$. E, visto $Q_n(f)$ aumentar com n, é fácil ver que, se fôr, para um certo N,

$$Q_N(f) \leq 2^{-N},$$

será

$$Q(f) \leq 2^{-(N-1)}$$

No caso que nos interessa, $Q_n(f)$ é o maior valor absoluto da função na esfera de raio n.

Com a distância atrás definida, o espaço é completo, condição que é satisfeita pelo espaço das funções contínuas a cinco variáveis reais ilimitadas.

Seja $L(f)$ uma funcional linear definida nesse espaço, mensurável B e, portanto, contínua [1]. Sendo $|L(f)|$ também contínuo, podemos afirmar [2] que, para uma seqüência $\{L_m(f)\}$ de tais funcionais, que é limitada para cada f dum conjunto de *segunda categoria,* existe uma esfera de elementos f em que a seqüência é *uniformemente limitada.*

Fazendo agora $f = f_o + g$, sendo f_o o centro da referida esfera, a seqüência

$$\{L_m(g)\} = \{L_m(f) - L_m(f_o)\}$$

é uniformemente limitada dentro duma certa esfera de elementos g, tendo a origem como centro; e, por maioria de razão, sôbre o conjunto $[Q_N(g) \leq 2^{-N}]$ que é, para N suficientemente grande, um subconjunto dessa esfera. Haverá, portanto, uma constante K tal que, para cada f e qualquer que seja m, é satisfeita a relação

$$(1) \qquad |L_m(f)| \leq K\, Q_N(f).$$

Isto é, *a relação (1) é satisfeita por duas constantes K e N, independentes de m e f, quando a seqüência* $\{L_m(f)\}$ *é limitada para cada f dum conjunto de segunda categoria.*

Se $\{L_m(f)\}$ fôr constituída por repetições duma mesma funcional linear $L(f)$, definida para cada f, pode concluir-se do que fica dito que *uma funcional linear L (f), definida para tôdas as seqüências* $f = \{f_n\}$, *depende só dum número finito de elementos* f_n.

Com efeito, se f e g são duas seqüências, tendo os mesmos N primeiros termos, a relação (1), aplicada a $f - g$, e visto ser $Q_N(f - g) = 0$, dá $L_m(f - g) = 0$; e sendo $L_m(f)$ uma repetição de $L(f)$, será $L(f) = L(g)$.

Chamando *compacto* a um conjunto de funcionais lineares $L(f)$ quando cada seqüência do conjunto tem uma subseqüência de convergência fraca, podemos também afirmar que:

A) *As funcionais lineares L (f) dum conjunto compacto dependem só dum número limitado de elementos* f_n.

Porque, se assim não fôsse, haveria uma seqüência $L_m(f)$ de elementos do conjunto tal que a relação (1) seria falsa quando $m = N = n$. Esta sequência seria ilimitada para algum elemento f; e não seria, portanto, compacta.

Alarguei um pouco a minúcia da análise porque nela se apoia êste teorema fundamental da teoria de L. C. Young:

B) *Um sistema de superfícies generalizadas lipschitzianas é compacto quando e só quando os seus padrões são interiores a uma esfera fixa e as suas constantes de Lipschitz são limitadas.*

Isto equivale a dizer que *as correspondentes funcionais* $L_{S^x}(f)$ *são independentes dos valores das funções contínuas f fora duma esfera fixa do espaço a cinco dimensões (x, y, z, p, q).*

Que as condições são necessárias, é uma conseqüência imediata do teorema A). Para mostrar que são suficientes, basta observar que, se elas se verificam, as funcionais lineares $L_{S^x}(f)$ podem considerar-se como definidas num espaço de Banach constituído por tôdas as funções de x, y, z, p, q que são contínuas dentro duma esfera fixa. E então, como corolário dum conhecido teorema de Banach [1], formam um conjunto compacto.

E, à custa dêste princípio fundamental, é agora possível demonstrar que a convergência duma sucessão de superfícies generalizadas importa, como já dissemos, a convergência da sucessão dos respectivos padrões.

Outro objectivo que se atinge com a restrição lipschitziana é o de tornar *completo* o sistema das superfícies generalizadas.

Com efeito, nós subordinámos o conceito de convergência duma seqüência $\{S_n^x\}$ de superfícies generalizadas à convergência

(1) Banach — *Théorie des opérations linéaires* (1932), pág. 23.

(2) Banach — L. c. — pág. 19.

(1) Banach. Log. cit. — pg. 123-th. 3.

da seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$ das funcionais respectivas. Mas nesta definição não intervém nenhuma referência a um limite. Quer dizer, a seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$ é convergente, mas não se afirma a existência duma superfície generalizada S_0^x tal que

$$\lim L_{S_n^x}(f) = L_{S_0^x}(f)$$

para cada função contínua f.

Quando isso se der, diremos então que a sequência $\{S_n^x\}$ tem o limite S_0^x. É claro que a existência dum limite implica a convergência da seqüência. Mas será verdadeira a recíproca?

Com a restrição lipschitziana e à custa das preposições anteriormente estabelecidas, demonstra-se que sim; e o espaço das superfícies generalizadas é, portanto, um espaço completo.

Não alongarei, já agora, a minha exposição, reproduzindo a demonstração de L. C. Young.

Vejamos, porém, como se pode efectuar, na resolução do problema variacional, o regresso (chamemos-lhe assim) aos sistemas de superfícies ordinárias.

Chamando lipschitziana a uma superfície ordinária $z = z(x, y)$, quando a desigualdade

$$|z(x', y') - z(x'', y'')| \leq K\rho$$

se verifica, sendo K uma constante determinada e ρ a distância de dois pontos quaisquer (x', y') e (x'', y'') do plano xy, é manifesto que as superfícies ordinárias lipschitzianas são casos particulares das generalizadas a que demos o mesmo nome.

Sendo assim, e por ser completo o sistema das superfícies generalizadas lipschitzianas, é claro que o limite duma seqüência convergente de superfícies ordinárias, também lipschitzianas, existe e é uma superfície generalizada cuja constante de Lipschitz não excede o extremo superior das constantes de Lipschitz das superfícies da seqüência. Pois bem: pode demonstrar-se que, inversamente, tôda a superfície generalizada é o limite duma seqüência de superfícies ordinárias, com as restrições que se contêm no enunciado do seguinte *teorema:*

C) *A classe das superfícies generalizadas, cujos padrões têm a mesma curva fronteira e cujas constantes de Lipschitz não excedem um certo número N, é o fecho da subclasse constituída pelas suas superfícies ordinárias.*

Quere dizer, dada uma superfície generalizada S^x, cuja constante de Lipschitz não excede N, existe uma seqüência $\{S_n\}$ de superfícies ordinárias, cujas constantes de Lipschitz não excedem N, e cuja fronteira comum é a do padrão da superfície generalizada S^x, tal que, para tôdas as funções contínuas $f(x, y, z, p, q)$

$$L_{S^x}(f) = \lim L_{S_n}(f).$$

Também não demonstraremos esta proposição de L. C. Young, a qual nos permite agora o exame da solução do problema variacional.

O problema inicial é o de minimizar uma certa funcional $F(S) = L_S(f)$, na classe S das superfícies ordinárias lipschitzianas, com certas condições extremais. Em vez do problema *ordinário,* consideremos o problema *generalizado* de minimizar a funcional $F(S^x)$ na correspondente classe de superfícies generalizadas S^x. Existe uma seqüência de superfícies ordinárias $\{S_n\}$ da classe considerada, para a qual os números $F(S_n)$ tendem para o mínimo do primeiro problema.

Mas, em virtude do teorema C), o mesmo acontece no caso do segundo problema: Os dois mínimos são, portanto, idênticos; isto é, *o problema ordinário é equivalente ao problema generalizado.* Êste resultado obtém-se sem restringir as constantes de Lipschitz. E se essas constantes não excedem um certo número K? Então podemos afirmar mais alguma coisa:

Na classe das superfícies com dadas condições extremais e cujas constantes de Lipschitz não excedem um número K, o mínimo de F(S) é o mesmo para as superfícies ordinárias e para as superfícies generalizadas, e existe uma superfície generalizada, na classe, para a qual êsse mínimo é atingido.

E assim se dá satisfação, no problema variacional de primeira ordem, relativo às superfícies, a um comentário célebre de Hilbert.

Todo o problema de cálculo de variações admite solução, desde que a natureza das condições seja convenientemente limitada e o conceito de solução, se fôr preciso, convenientemente generalizado.

Com as restrições impostas, o problema tem solução; não será ela uma superfície ordinária, mas é uma superfície generalizada.

No caso das linhas, o problema é, certamente, menos complicado e foi tratado exaustivamente por Mc Shane [1], utilizando a representação paramétrica.

Uma curva generalizada (a definição, como se disse, é de L. C. Young) é determinada pelo seguinte par de elementos:

1 — Um sistema de funções $y^i = y^i(t)$, $a \leq t \leq b$, $(i = 1, 2 \ldots k)$, absolutamente contínuas em $[a, b]$ e possuindo derivadas finitas num conjunto E, contido em $[a, b]$ e de medida $b - a$;

2 — Uma funcional linear $M(\varphi)$, não negativa, definida para cada t em E e para tôdas as funções contínuas $\varphi(r)$, sendo $r = (r^1, r^2 \ldots r^k)$ um vector do espaço k — dimensional, e tal que, para todos os valores de t em E, $M(t, \varphi) = y^i(t)$, quando fôr $\varphi(r^1, r^2 \ldots r^k) = r^i$. A funcional M é, além disso, mensurável em E e determinada pelos valores de $\varphi(r)$ num conjunto limitado de valores de r.

A curva $C\,[y^i = y^i(t)\ (i = 1, 2 \ldots k)]$ é o *padrão* da curva generalizada.

As funcionais minimizantes, de que o exemplo

$$L_C(f) = \int_C f(x, y, x', y')\, dt \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

anteriormente dado, é o caso mais simples, são, na análise de Mc Shane, integrais curvilíneos cujos integrandos $f(y, r)$ (abreviatura de $f(y^1, y^2, y^k, r^1, r^2 \ldots r^k)$ são funções contínuas, qualquer que seja

$$y = (y^1, y^2, \ldots y^k)$$

e qualquer que seja r, *positivamente homogéneas de grau 1,* em relação a r.

Dado um *integrando paramétrico* $f(y, r)$, assim definido, a funcional minimizante, relativa à curva generalizada C^x, correspondente ao padrão C, é da forma

$$1) \qquad F(C^x) = \int_E M[t, f(y, r)]\, dt,$$

sempre que êste integral exista. Pela definição dada de $M(t, \varphi)$, certamente $M(t, |r|)$ é não-negativa e mensurável em E. Se ela fôr *somável,* diz-se que a curva generalizada C^x é *rectificável* e o seu comprimento é

$$2) \qquad L(C^x) = \int_E M(t, |r|)\, dt.$$

Poderemos substituir os integrais dos segundos membros de 1) e 2) por integrais definidos entre a e b, atribuindo o valor zero ao integrando nos pontos do conjunto complementar de E.

Pois bem, mostra-se que, *se a curva generalizada* C^x *é rectificável, o integral* $F(C^x)$ *é determinado.*

A topologia do espaço das curvas generalizadas estabelece-se da seguinte maneira:

A curva generalizada rectificável C_0^x *é o limite da seqüência* $\{C_n^x\}$ *de curvas generalizadas rectificáveis se:*

a) *A distância de Fréchet entre os padrões de* C_0^x *e de* C_n^x *tende para zero quando* n *tende para infinito;*

b) *Para cada integrando paramétrico* $f(y, r)$, $\lim_{n \to \infty} F(C_n^x) = F(C_0^x)$.

Dizemos que duas curvas generalizadas C_0^x e C_1^x são idênticas quando:

a) *Os seus padrões têm uma distância de Fréchet nula;*

b) $F(C_0^x) = F(C_1^x)$ *para todos os integrandos paramétricos.*

E é possível agora demonstrar que:

Se a curva generalizada C^x *é rectificável e* K *é um número positivo qualquer, podemos supor, sem quebra de generalidade, que,*

---

[1] Mc Shane, log. cit.

qualquer que seja t em E, a funcional $M(t, \varphi)$ depende apenas dos valores de $\varphi(r)$ dentro da esfera $|r| = K$.

Como se vê, a análise de Mc Shane conduz, por via diversa, a resultados análogos aos da análise de L. C. Young para as superfícies.

Define-se, em seguida, o conceito de *isomorfismo. Uma curva generalizada* C^x *diz-se isomorfa duma curva ordinária quando, para quási todos os valores de t em E, a funcional $M(t, \varphi)$ depende só do valor de φ num único ponto r_t.*

Pois bem, nesse caso, por ser M determinado pelos valores de $\varphi(r)$ num conjunto limitado de valores de r, será

$$M(t, \varphi) = a\,\varphi(r_t)\,(a > 0$$

o que implica, por outra propriedade de M, que seja

$$a\,r_t^i = y'^i(t).$$

Se $f(y, r)$ é um integrando paramétrico, homogéneo de grau 1 em r, será, pois,

$$M[t, f(y, r)] = a\,f(y, r_t) = f(y, y').$$

E, sendo esta igualdade verdadeira para quási todos os valores de t em $[a, b]$, será

$$(3) \qquad \int_a^b f(y, y')\,dt = \int_a^b M[t, f(y, r)]\,dt.$$

Se dois isomorfos C_1^x e C_2^x de curvas generalizadas correspondem ambos a $C[y = y(t)]$, nesse caso C é o padrão de ambas as curvas ordinárias; e, em virtude de (3),

$$F(C_1^x) = F(C_2^x)$$

para todos os integrandos paramétricos $f(y, r)$. Logo, os dois isomorfos são idênticos, por definição.

Isto é, *se as curvas rectificáveis ordinárias C e os isomorfos C^x das curvas ordinárias são conjuntos que relacionamos entre si, fazendo corresponder cada C^x ao respectivo padrão, essa correspondência é biunívoca. E, para todos os integrandos paramétricos, verifica-se a relação (3).*

Pois bem, L. C. Young demonstrou que *o conjunto dos isomorfos das curvas ordinárias é por tôda a parte denso, no conjunto das curvas generalizadas rectificáveis.*

E êste resultado é semelhante a outro obtido por L. C. Young no caso das superfícies, como já vimos.

Não alongo mais esta exposição, resumida e aliviada das demonstrações que se encontram nas memórias citadas de L. C. Young e Mc Shane.

Expuz apenas o indispensável para formular o meu pensamento sôbre a generalização desta análise aos problemas variacionais de ordem superior à primeira.

Comecemos por considerar o caso das superfícies e, nêle, o problema de segunda ordem.

Consideremos um domínio A do plano $x\,y$, e o integral

$$(1) \quad L_S(f) = \iint_A f(x, y, z, p, q, r, s, t)\,dx\,dy,$$

onde f é uma função contínua dos seus *oito* argumentos.

Seja E o conjunto de tôdas as funções contínuas $\varphi(r, s, t)$ e $M(\varphi)$ uma funcional que faz corresponder um número real a cada elemento φ do conjunto E, com as mesmas propriedades da *média linear* definida no caso do problema de 1.ª ordem; isto é,

a) É *não-negativa,* se φ fôr não-negativa;

b) É *linear:*

$$M(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1 M(\varphi_1) + a_2 M(\varphi_2)$$

para todos os números reais a_1 e a_2, e para cada par (φ_1, φ_2) de elementos de E;

c) $M(\varphi) = 1$, quando φ fôr a constante unidade.

Dizemos que $M(\varphi)$ é *mensurável* quando, dependendo $M(\varphi)$ dos parâmetros adicionais x e y, o número $M(\varphi)$ que se obtém, formando a média linear em x e y, fôr função mensurável de x e y, para cada função contínua φ, dependendo só de r, s e t. E pode mostrar-se, generalizando uma análise de Mc Shane, que isto acontece quando, sendo φ função dos *cinco* elementos x, y, r, s, t, ela fôr contínua em relação a todos êles.

Chamaremos *superfície generalizada* ao sistema definido pelo seguinte par de elementos:

1 — Uma função real $z(x, y)$, absolutamente contínua, no sentido de Tonelli, possuindo derivadas parciais, primeiras e segundas, quási por tôda a parte, no domínio A;

2 — Uma média linear $M(\varphi)$, definida nos pontos (x, y), do domínio A, mensurável em x e y, que opera sôbre qualquer função contínua $\varphi(r, s, t)$, e tal que, para quási todos os pontos do domínio, $M(r)$, $M(s)$ e $M(t)$ são os valores das derivadas segundas de $z(x, y)$; isto é, $M(r) = r$, $M(s) = s$, $M(t) = t$.

A função $z(x, y)$ chamaremos *padrão* da superfície generalizada.

Se fôr S a superfície ordinária de equação $z = z(x, y)$, representaremos por S^x a respectiva superfície generalizada.

Nos problemas clássicos, a funcional (1), relativa a uma superfície ordinária S, calcula-se, substituindo, em f, z por $z(x, y)$ e p, q, r, s, t respectivamente pelas derivadas parciais, primeiras e segundas de f. Se fôr $\bar{f}(x, y)$ a função de x e y que resulta dessa substituïção, será $L_S(f) = \iint_A \bar{f}(x, y)\, dx, dy$.

Como se calcula a funcional $L_{S^x}(f)$ relativa a uma superfície generalizada S^x?

Substituindo $\bar{f}(x, y)$ por $M(\varphi)$, sendo $\varphi = \varphi(r, s, t)$ o valor, no ponto (x, y), da função $\varphi(x, y, r, s, t)$ que se obtém quando, em $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$ se substitue z pelo *padrão* $z(x, y)$, p por $\frac{\partial z}{\partial x}$ e q por $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Pelo que atrás se disse, a função

$$\bar{f}(x, y) = M(\varphi)$$

assim obtida será mensurável.

As superfícies ordinárias são casos particulares das generalizadas e a funcional $L_S(f)$ um caso particular de $L_{S^x}(f)$; a média M consiste em substituir em f, para quási todos os valores de x e y no domínio A, as variáveis r, s, t pelas derivadas segundas do padrão $z(x, y)$.

Diremos agora, generalizando a análise de L. C. Young, que uma superfície S^x é *lipschitziana*, com a constante K, se em cada ponto (x, y), a média linear $M(\varphi)$, duma função contínua arbitrária $\varphi(r, s, t)$, é independente dos valores tomados por φ fora duma esfera de raio K, cujo centro é a origem do espaço tridimensional (r, s, t).

Uma seqüência $\{S_n^x\}$ de superfícies generalizadas converge quando a seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$ converge no sentido fraco; isto é, para cada função contínua $f(x, y, z, p, q, r, s, t)$.

A análise de L. C. Young que conduz à afirmação de que *as funcionais lineares $L(f)$ dum conjunto compacto dependem só dum número limitado de elementos f_n*, subsiste inalterável no caso presente [1]. Os elementos do espaço das funções f são definidos por seqüências $\{f_n\}$, sendo f_n um elemento dum espaço de Banach, variável possìvelmente com n. O espaço dos argumentos de f tem agora *oito*, em vez de cinco dimensões.

Demonstra-se igualmente que *um sistema de superfícies generalizadas lipschitzianas é compacto quando e só quando os seus padrões são interiores a uma esfera fixa e as suas constantes de Lipschitz são limitadas.* Ou, o que é o mesmo, *as correspondentes funcionais* $L_{S^x}(f)$ *são independentes dos valores das funções contínuas* f *fóra duma esfera fixa do espaço a oito dimensões* (x, y, z, p, q, r, s, t).

A demonstração destas proposições é um decalque das de L. C. Young, na resolução do problema de primeira ordem.

E, do mesmo modo, se verifica que *a convergência duma sucessão de superfícies generalizadas importa a convergência uniforme da sucessão dos respectivos padrões.*

Trata-se agora de averiguar que *o sistema das superfícies generalizadas lipschitzianas, no sentido atrás definido, é completo,* como no problema de primeira ordem.

Por definição de convergência, a seqüência $\{S_n^x\}$ é convergente quando o fôr a seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$. Mas não é necessário que exista uma superfície generalizada S_0^x

[1] As demonstrações serão publicadas noutro lugar.

tal que o limite da seqüência $\{L_{S_n^x}(f)\}$ seja $L_{S_0^x}(f)$. Se assim fôr, diz-se que a seqüência $\{S_n^x\}$ tem o limite S_0^x. Pois bem, demonstra-se, como para o problema de primeira ordem, que *tôda a seqüência convergente de superfícies generalizadas tem limite.*

A demonstração é análoga à de L. C. Young [1], que eu não reproduzi por ser relativamente extensa. Basta substituir a média linear de L. C. Young pela que atrás definimos em r, s, t; e, onde, no raciocínio de Young, se supõem fixos $x, y, z(x, y)$, supor também fixos os valores de p e q, visto que a *média linear* se refere apenas a r, s, t.

As superfícies ordinárias lipschitzianas são um caso particular das generalizadas, como é óbvio. E, como o sistema das superfícies generalizadas lipschitzianas é completo, como acabamos de ver, *o limite duma seqüência convergente de superfícies ordinárias existe e é uma superfície generalizada, cuja constante de Lipschitz não excede o extremo superior das constantes de Lipschitz das superfícies da seqüência.*

A recíproca é verdadeira, com as restrições que resultam do seguinte teorema, análogo ao de L. C. Young, para o problema de primeira ordem:

C') *A classe das superfícies generalizadas lipschitzianas cujos padrões e respectivos gradientes têm as mesmas condições extremais e cujas constantes de Lipschitz não excedem um certo número N, é o fecho da subclasse constituída pelas suas superfícies ordinárias.*

Quere dizer, *dada uma superfície generalizada S^x, cuja constante de Lipschitz não excede N, existe uma seqüência $\{S_n\}$ de superfícies ordinárias cujas constantes de Lipschitz não excedem N (e com as mesmas condições extremais, para $z = z(x, y)$ e respectivos gradientes, que tem o padrão da superfície generalizada S^x), tal que para tôdas as funções contínuas*

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t),$$

$$L_{S^x}(f) = \lim L_{S_n^x}(f).$$

E ainda êste teorema é uma generalização imediata do análogo teorema de L. C. Young para o problema de primeira ordem.

Sendo assim, em vez do problema ordinário de minimizar a funcional

$$F(S) = L_S(f) = \iint_A f(x, y, z, p, q, r, s, t)\, dx\, dy,$$

consideremos o problema generalizado de minimizar a funcional $F(S^x)$, na correspondente classe de superfícies generalizadas S^x. Existe uma seqüência $\{S_n\}$ de superfícies ordinárias, da classe considerada, para a qual os números $F(S_n)$ tendem para o mínimo do primeiro problema. E como, em virtude do teorema C'), o mesmo acontece no caso do segundo problema, os dois mínimos serão idênticos. *O problema ordinário é equivalente ao problema generalizado.*

Se as constantes de Lipschitz não excedem um certo número K, podemos então afirmar, como para o problema de primeira ordem, que *existe uma superfície generalizada, na classe considerada, para a qual o mínimo é atingido.*

E o problema de segunda ordem das superfícies generalizadas fica resolvido.

No caso geral, para o problema variacional de ordem n relativo às superficies, é dada uma funcional

$$F(S) = L_S(f) = \iint_A f\left(\underset{(i,\, k=0,\, 1,\, \ldots\, n)}{x, y, z, z_x, z_y, \ldots z^{(n)}_{x^i y^k}}\right) dx\, dy \qquad i+k=n$$

em que os argumentos da função contínua f são x, y, z, e as derivadas parciais de z, em ordem a x e y, até à ordem n.

A superfície generalizada correspondente é definida por:

1) Uma função real $z(x, y)$, absolutamente contínua no sentido de Tonelli, possuindo derivadas parciais, quási por tôda a parte em A, até à ordem n;

2) Uma *média linear* $M(\varphi)$, definida nos pontos (x, y) do domínio A e mensurável em x e y, que opera sôbre qualquer função contínua $\varphi(z^{(n)}_{x^i y^k})$ das derivadas de *maior*

[1] L. C. Young, log. cit. (IV).

ordem, e tal que, em quási todos os pontos do domínio,

$$M\,(z^{(n)}_{x^i y^k}) = z^{(n)}_{x^i y^k}.$$

A funcional $F\,(S^x) = L_{S^x}\,(f)$, correspondente à superfície generalizada S^x, é dada por

$$L_{S^x}\,(f) = \iint_A \bar{f}\,(x, y)\,dn\,dy,$$

sendo

$$\bar{f}\,(x, y) = M\,(\varphi);$$

e

$$\varphi = \varphi\,(z^{(n)}_{x^i y^k})$$

o valor, no ponto (x, y), da função

$$\varphi\,(x, y, z^{(n)}_{x^i y^k})$$

que se obtém quando, em

$$f\,(x_1\ y_1\ z,\ z_x,\ z_y \ldots\ z^{(n)}_{x^i y^k})$$

se substitue z pelo padrão $z\,(x, y)$ e tôdas as derivadas de z, *de ordem inferior a n*, pelos respectivos valores correspondentes a êsse padrão.

E a análise de L. C. Young reproduz-se, duma maneira semelhante.

O problema variacional de ordem n, no caso das curvas, admite igualmente uma generalização imediata da análise de Mc Shane.

O problema clássico consiste, como é sabido, em determinar a curva minimizante da funcional

$$F\,(C) = L_C\,(f) = \int_C f\,(t, y_i, y'_i \ldots, y^{(n)}_i)\,dt \begin{cases} y_i = y_i\,(t) \\ i = 1,2 \ldots k \end{cases}$$

no intervalo $a \leq t \leq b$, com dadas condições extremais.

Uma curva generalizada é determinada pelo seguinte par de elementos:

1) Um sistema de funções $y_i = y_i\,(t)$ $(i = 1,2 \ldots k)$, absolutamente contínuas no intervalo $[a, b]$ e possuindo derivadas finitas até à ordem n, num conjunto E, contido em $[a, b]$, e de medida $b - a$;

2) Uma funcional linear $M\,(\varphi)$, não negativa, definida para cada t em E, e para tôdas as funções contínuas $\varphi\,(r)$, sendo $r = (r_1, r_2 \ldots r_k)$ um vector do espaço k — dimensional, e tal que, para todos os valores de t em E, $M\,(t, \varphi) = y_i^{(n)}\,(t)$, quando fôr $\varphi\,(r_1\ r_2 \ldots r_k) = r_i$. A funcional M é, além disso, mensurável em E e determinada pelos valores de $\varphi\,(r)$ num conjunto limitado de valores de r.

A curva $C\,[y_i = y_i\,(t)]$ $(i = 1,2 - \ldots k)$ é o *padrão* da curva generalizada.

Um *integrando paramétrico*

$$f\,(y, y' \ldots y,^{(n-1)} r)$$

[abreviatura de

$$f(y_1, y_2, \ldots y_k, y^1_1, \ldots y^1_k \ldots y^{(n-1)}_1 \ldots y^{(n-1)}_k, r_1, r_2 \ldots r_k)]$$

é uma função contínua dos seus argumentos, positivamente homogénea de grau 1, em relação a r.

Dado um integrando paramétrico, assim definido, a funcional relativa à curva generalizada C^x, correspondente ao padrão C, é da forma

$$1)\ F\,(C^x) = L_{C^x}\,(f) = \int_E M\,[t, f\,(y, y^1 \ldots y,^{(n-1)}, r)]\,dt$$

sempre que êste integral exista.

Pela definição dada de $M\,(t, \varphi)$, certamente $M\,(t, |r|)$ é não negativa e mensurável em E. Se ela fôr *somável*, diremos que a curva generalizada C^x é *rectificável de ordem n* (¹) e o seu *comprimento de ordem n* é

$$2)\qquad L\,(C^x) = \int_E M\,(t, |r|)\,dt$$

Nos integrais 1) e 2), podemos substituir o conjunto E de integração pelo intervalo $[a, b]$, atribuindo o valor zero ao integrando nos pontos do conjunto complementar de E.

E a análise é agora análoga à de Mc Shane, para o problema de primeira ordem:

a) Se a curva generalizada C^x é rectificável de ordem n, o integral 1) é determinado;

b) Define-se, de igual modo, o limite duma seqüência de curvas generalizadas e a identidade de duas delas;

(¹) Por analogia de propriedades, no problema variacional, pareceu-nos conveniente conservar o nome *rectificável.*

c) Se a curva generalizada C^x é rectificável de ordem n, e K é um número positivo, podemos sempre supor, sem quebra de generalidade, que, qualquer que seja t em E, a funcional M (t, φ) depende apenas dos valores de $\varphi(r)$ dentro da esfera $|r| = K$;

d) É ainda análoga a definição de isomorfismo; e dela resulta que o segundo membro de 1) é igual ao integral

$$\int_a^b f(y, y' \ldots y,^{(n-1)} y^{(n)})\, dt$$

para as curvas generalizadas C^x que são isomorfas duma curva ordinária.

e) Se dois isomorfos C_1^x e C_2^x de curvas generalizadas correspondem ambos a

$$C[y = y(t)],$$

os dois isomorfos são idênticos;

f) Finalmente, o conjunto dos isomorfos das curvas ordinárias é por tôda a parte denso, no conjunto das curvas generalizadas rectificáveis de ordem n.

E daqui resulta, como para o problema de primeira ordem, a existência duma solução minimizante generalizada, atingida pelo problema variacional de ordem n.

Como se vê, e era êsse o objectivo primacial desta exposição, a solução dos problemas variacionais de ordem superior, à custa do conceito de lugar geométrico generalizado, não carece de maiores restrições do que aquelas que foram estabelecidas por L. C. Young e Mc Shane, para a resolução dos problemas de primeira ordem.

Bibliografia

I) — L. C. Young, *Proc. of the Royal Soc.* (1933), pág. 325.

II) — L. C. Young, *Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* (1937), pág. 212.

III) — L. C. Young, *Acta Mathematica* (1938), pág. 239.

IV) — L. C. Young, *Annals of Mathematics*, January, 1942, pág. 84.

V) — E. J. Mc Shane, *Duke Math. Journal*, Vol. 6 (1940), pág. 513.

VI) — E. J. Mc Shane, *Duke Math. Journal*, Vol. 7 (1940), pág. 1.

VII) — E. J. Mc Shane, *Duke Math. Journal*, Vol. 7 (1940), pág. 28.

VIII) — E. J. Mc Shane, *Bul. of. the Amer. Math. Soc.*, Vol. 40 (1934), pág. 837.

UNIDADES LOGARÍTMICAS

PELO ENG.º PAULO DE BRITO ARANHA
PROF. DO I. S. T. E DA E. E.

Não há talvez assunto, na técnica das telecomunicações, que mais prejuízos tenha sofrido em resultado da insuficiência livresca. Os tratados de categoria não se dignam de dedicar-lhe a atenção que, pela sua alargada importância, sem dúvida merece; e os compêndios de vulgarização, quando não o desvirtuam, como tanta vez acontece, escamoteiam sistemàticamente as suas múltiplas dificuldades.

Abre-se a exposição com um ensaio de estudo abstracto, que se destina a iniciados; e prossegue-se com um exame concreto das unidades logarítmicas usuais, seguida de aplicações numéricas típicas e de várias tabelas úteis.

Supõe-se, assim, ter esclarecido todos os aspectos geralmente nebulosos do problema.

O uso de unidades logarítmicas, na expressão da relação de grandezas da mesma espécie, acabou por impor-se definitivamente no domínio das telecomunicações.

Poderosas razões contribuíram para o êxito; mas, antes de se enumerarem, convém estabelecer primeiro a definição dessas unidades.

Imagine-se que determinada grandeza A, devido a causa que se não precisa especificar, *altera* o seu valor de A_1 para A_2 (1).

Seja y o valor da relação A_1 / A_2 e iguale-se a uma exponencial de base a. Ter-se-á:

$$\frac{A_1}{A_2} = y = a^n$$

Se se tomar n, que, por definição, é o logaritmo de y no sistema de base a ($n = \log_a y$), para *substituir* o valor numérico y da relação A_1 / A_2, pode dizer-se que *a relação* A_1 / A_2 *está referida a unidades exponenciais ou logarítmicas de base a.*

O resultado n *mede,* nessa escala logarítmica, *a alteração da grandeza* A, cujo valor passa de A_1 para A_2. E diz-se que, ao passar do valor A_1 para o valor A_2, *a alteração da grandeza A é de* n *unidades logarítmicas de base a.* A afirmação significa que se toma para unidade a alteração da grandeza na relação $a^1 = a$, por outras palavras, na relação igual à base.

As unidades logarítmicas gosam, evidentemente, das propriedades gerais dos logaritmos.

---

(1) Esta alteração pode referir-se a um dado ponto (alteração no tempo) ou pode resultar de observações em pontos diferentes (alteração no espaço).

Imagine-se, por exemplo, que a grandeza A, depois de passar do valor A_1 ao valor A_2, se *altera* de novo do valor A_2 para o valor A_3. Seja

$$\frac{A_2}{A_3} = a^m \qquad \left(m = \log_a \frac{A_2}{A_3}\right)$$

Dir-se-á que a nova alteração de A é de m unidades logarítmicas de base a. E, do mesmo modo, se a grandeza ainda se alterar de A_3 para A_4 e se tiver:

$$\frac{A_3}{A_4} = a^p \qquad \left(p = \log_a \frac{A_3}{A_4}\right)$$

dir-se-á, mais uma vez, que a alteração de A é de p unidades logarítmicas de base a.

A alteração total, do valor A_1 para o valor A_4, exprimir-se-á:

$$\frac{A_1}{A_4} = \frac{A_1}{A_2} \times \frac{A_2}{A_3} \times \frac{A_3}{A_4} = a^n \,.\, a^m \,.\, a^p = a^{n+m+p}$$

sendo, por conseqüência, de n + m + p unidades logarítmicas de base a. E assim sucessivamente (1).

As unidades logarítmicas exprimem o efeito de alterações sucessivas por simples adição. Primeira vantagem fundamental.

Esta adição é uma *adição algébrica*. Na realidade, o número de unidades logarítmicas pode ser *positivo* ou *negativo*, consoante, suposta a base *a* superior à unidade, como é natural, a grandeza A se altera, *respectivamente*, para um valor *menor* — caso dum *enfraquecimento, atenuação* ou *perda* — ou para um valor *maior* — caso duma *ampliação* ou *ganho*. À luz do critério logarítmico, e quando a base fôr superior à unidade, o *ganho* pode, pois, considerar-se, *perda negativa* (2).

E resulta das propriedades gerais dos logaritmos que, se a alteração de A_1 para A_2 fôr de n unidades, a alteração inversa de A_2 para A_1 será de — n unidades. Suposto positivo o número n, tratar-se-á, no primeiro caso, dum *enfraquecimento* de n unidades logarítmicas e, no segundo caso, dum *ganho* de n unidades. (Seria o contrário se se considerasse n negativo ou $A_1 < A_2$).

Efectivamente, o logaritmo dum número é igual e de sinal contrário ao logaritmo do seu recíproco, visto que se:

$$\frac{A_1}{A_2} = a^n \quad , \quad \text{será: } \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

A alteração duma grandeza A, do valor A_1 para o valor A_2, será expressa, em unidades logarítmicas, pelo mesmo valor absoluto que a alteração em sentido contrário, do valor A_2 para o valor A_1. Segunda vantagem fundamental.

Imagine-se, agora, que a grandeza A varia dentro de muito largos limites, por exemplo de 1 para 10^{100}, e que há necessidade de *figurar a totalidade das suas alterações sucessivas dentro dos limites práticos dum gráfico de pequenos dimensões.* O uso de

---

(1) Estas alterações sucessivas podem dar-se num dado ponto *(sucessividade no tempo)* ou de ponto para ponto *(sucessividade no espaço)*.

(2) Se se usar o têrmo de *referência* A_1 em denominador, como se faz nos cálculos de *nível*, então é a *perda* que resulta um *ganho negativo*.

unidades logarítmicas resolve com elegância o problema, visto que se representa o intervalo de 10^{10} para 10^{100} como o de 1 para 10, [1] o que equivale a dizer que as grandes alterações de A são expressas por números pequenos. *Terceira vantagem fundamental.*

Em muitos casos, vai-se ao ponto de, nos gráficos, graduar de forma também logarítmica as abcissas [2] em função das quais variam as grandezas já expressas em unidades logarítmicas nas ordenadas. Razões de natureza psicológica apoiam, às vezes, tal forma de proceder.

A harmonia da ordem de grandeza dos resultados referidos a unidades logarítmicas *com a intensidade psicológica das sensações,* que eventualmente êsses resultados possam ser chamados a interpretar, constitue, de-facto, a *quarta vantagem fundamental* do seu uso, porventura *a mais decisiva* de tôdas quando se trata de grandezas que, directa ou indirectamente, estão relacionadas com sensações.

Com efeito, a importante lei psicológica de Weber-Fechner estabelece que «*a mínima alteração de estímulo necessária para produzir uma alteração percetível de sensação é proporcional ao estímulo prèviamente existente*». Pode êste enunciado traduzir-se abreviadamente dizendo que «*a sensação é proporcional ao logaritmo da excitação*» ; e conclue-se que o que os sentidos percebem é alterações proporcionais, e não absolutas, na intensidade ou no carácter do estímulo que as provocam.

Significa isto que os sentidos humanos se aperceberão das unidades logarítmicas como se representassem intervalos aproximadamente iguais. Tais unidades prestam-se, pois, admiràvelmente, para exprimir as alterações de grandezas relacionadas com sensações, nomeadamente de natureza acústica. É em electro-acústica que, efectivamente, a lei de Weber-Fechner exerce mais acentuada influência. Todos os dispositivos eléctricos de transmissão empregam hoje correntemente as unidades logarítmicas, muitas vezes até designadas *unidades de transmissão* [3], visto ter tido comêço a sua história com a realização das primeiras transmissões telefónicas por cabo. Cronològicamente, a primeira unidade de transmissão foi mesmo a «milha de cabo normal», já caída em desuso, por não ter sido posteriormente considerada perfeita.

Resumindo:

Com o uso de unidades logarítmicas, os resultados combinam-se por simples adição algébrica e os números empregados para exprimir o valor das relações confinam-se entre limites mais estreitos, constituindo, além disso, no domínio da acústica, muito mais expressivos índices de sensação.

As unidades logarítmicas mais usuais receberam *designação própria,* além de *definição concreta* quanto à natureza da grandeza que *primàriamente* devem afectar.

A unidade logarítmica de base neperiana designa-se *néper*. Refere-se *primàriamente* a *relações de correntes ou de tensões.* O motivo é que, na técnica ordinária da transmissão telefónica, as correntes e as tensões, ao longo duma linha de características constantes, decrescem *naturalmente* segundo uma relação exponencial de base *e*. O néper surge, por conseqüência, como uma *unidade logarítmica natural de transmissão* na técnica das comunicações por fios.

A unidade logarítmica de base briggsiana ou decimal designa-se *bel*. Refere-se primàriamente a *relações de potências,* tanto de natureza eléctrica, como de natureza acústica. Foi o sub-múltiplo *decibel* [4], dez vezes menor, que, todavia, se universalizou. O motivo é

---

(1) E, na maioria dos casos, os intervalos de 1 para 10, de 10 para 100, de 100 para 1.000 e de 1.000 para 10.000 são os mais interessantes de observar em escala grande.

(2) Existe papel graduado logarìtmicamente. A marcação directa dos valores numéricos duma grandeza em tal papel dá ao gráfico resultante a configuração que teria se se marcassem, em graduação proporcional, os valores expressos em unidades logarítmicas.

(3) *Unidades de sensação* é outra das suas designações correntes. A lei de Weber-Fechner explica o têrmo.

(4) O êxito de decibel encorajou a técnica alemã, ainda bastante fiel ao néper na técnica das comunicações por fios, a vulgarizar o *decineper*, cuja ordem de grandeza é quási idêntica, como adiante se verá.

que a alteração de potência acústica de 1 decibel constitue aproximadamente o mínimo reconhecivel pelo ouvido humano médio. O decibel surge, por conseqüência, como uma *unidade logarítmica natural de sensação* nos domínios da acústica e, como corolário, da electro-acústica.

Acontece ainda, em acústica fisiológica, que a sensibilidade do ouvido reage às alterações proporcionais, não apenas da intensidade do som, mas também da sua freqüência fundamental, ou *altura* (1). Quando os fenómenos se representam em função da freqüência pode, pois, justificar-se, sob o aspecto psicológico, que as abcissas se graduem segundo uma escala igualmente logarítmica, forma de proceder a que já se fêz alusão (2).

De acôrdo com as definições, ter-se-á, pois:

Número de nèpers

$$n_{nep} = \log_e \frac{I_1}{I_2} \quad \text{e} \quad n_{nep} = \log_e \frac{E}{E_2}$$

Número de decibels

$$n_{db} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

O número de decibels pode também obter-se a partir da relação das correntes ou das tensões, notando que $P = E\,I \cos\varphi = I^2 Z \cos\varphi = (E^2/Z) \cos\varphi \; (= R\,I^2)$. (3) Se as potências se desenvolverem na mesma impedância ou em impedâncias de igual módulo e igual argumento (4), ter-se-á:

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} \quad \text{e} \quad n_{db} = 20 \log_{10} \frac{E_1}{E_2}$$

No caso da relação das correntes, para que a expressão seja exacta, bastará que o produto $Z \cos\varphi$ seja idêntico (impedâncias de igual componente resistiva) (5).

Em função das potências, o número de népers será:

$$n_{nep} = \frac{1}{2} \log_e \frac{P_1}{P_2}$$

Quando as *impedâncias* são *diferentes,* o número de decibels, que, *por definição,* se refere a uma relação de potências, terá de determinar-se a partir da relação das correntes ou das tensões, pelas expressões seguintes (6):

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{I_1}{I_2} + 10 \log_{10} \frac{Z_1}{Z_2} + 10 \log_{10} \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

e

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{E_1}{E_2} + 10 \log_{10} \frac{Z_2}{Z_1} + 10 \log_{10} \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

---

(1) As *oitavas* sucessivas, por exemplo, dão a sensação de intervalos iguais. A freqüência, de oitava para oitava, cresce, porém, de forma proporcional (na relação de 1 para 2) e não de forma absoluta.

(2) A forma de proceder justifica-se, principalmente, para as freqüências acústicas; mas usa-se, também, por extensão, para as freqüências ultra-acústicas.

(3) $\overline{Z} = R + jX$ e $Z = |Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\operatorname{tg}\varphi = X/R$ e $\cos\varphi = R/Z$.

(4) Quando se comparam potências, o resultado é independente das impedâncias em que as potências se desenvolvem.

(5) Esta observação explica o uso de unidades logarítmicas nas curvas de ressonância.

(6) As expressões significam que, antes de calcular o número de decibels, se avalia primeiro a potência e depois se aplica a equação de definição.

Acentua-se modernamente, com o uso do decineper, a tendência de definir também o neper a partir da relação das *potências*:

Número de nepers

$$n_{nep} = \frac{1}{2} \log_e \frac{P_1}{P_2} \qquad \left(n_{dnep} = 5 \log_e \frac{P_1}{P_2} \right)$$

Nessa conformidade, no caso de *impedâncias diferentes,* o número de nepers, a partir da relação das correntes ou das tensões, obter-se-á pelas expressões:

$$n_{nep} = \log_e \frac{I_1}{I_2} + \frac{1}{2} \log_e \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{1}{2} \log_e \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

e

$$n_{nep} = \log_e \frac{E_1}{E_2} + \frac{1}{2} \log_e \frac{Z_2}{Z_1} + \frac{1}{2} \log_e \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

O número de decinepers será, evidentemente, dez vezes maior.

As diferentes unidades logarítmicas são fàcilmente conversíveis, visto que *existe proporcionalidade entre logaritmos de bases diferentes.* Recorda-se que o *módulo de transformação* é o *inverso do logaritmo da nova base no sistema de base antiga:*

$$\log_{10} y = \log_e y \times \frac{1}{\log_e 10} = \log_e y \times \frac{1}{2{,}303} \quad (^1)$$

$$\log_e y = \log_{10} y \times \frac{1}{\log_{10} e} = \log_{10} y \times 2{,}303$$

Por conseqüência, *passa-se do logaritmo decimal ao logaritmo neperiano multiplicando por 2,3* (aproximadamente); passa-se do logaritmo neperiano ao logaritmo decimal dividindo por 2,3 (ou multiplicando por 0,434).

Notando que o número de nepers é $\log_e (I_1/I_2)$ e o de decibels, $20 \log_{10} (I_1/I_2)$, a relação entre o número de nepers e o de decibels, com que se exprime a mesma relação I_1/I_2, é:

$$\frac{n_{nep}}{n_{db}} = \frac{\log_e \frac{I_1}{I_2}}{20 \log_{10} \frac{I_1}{I_2}} = \frac{1}{20} \cdot 2{,}303 = 0{,}1151$$

A relação inversa tem o valor:

$$\frac{n_{db}}{n_{nep}} = 8{,}686$$

Como o número que exprime uma grandeza é inversamente proporcional à unidade em que a grandeza está expressa, conclue-se que:

1 nep = 8,686 db	1 dnep = 0,8686 db
1 db = 0,1151 nep	1 db = 1,151 dnep

(1) $\log_e 10 = 2{,}303 \qquad \log_{10} e = \frac{1}{2{,}303} = 0{,}434.$

Observa-se que o decibel e o decineper são da mesma ordem de grandeza, apenas diferem de cêrca de 15 %.

É evidente que se poderá realizar um sistema que provoque exactamente um enfraquecimento igual a 1 unidade logarítmica, nomeadamente, para fixar idéias, 1 néper. Êsse sistema poderá ser, por exemplo, uma determinada extensão de cabo telefónico de características dadas.

Também é possível fazer o inverso: tomar uma dada extensão de cabo telefónico e adaptá-la para unidade logarítmica de enfraquecimento. Foi assim que se procedeu ao princípio: adoptou-se como *unidade logarítmica* a *milha de cabo normal* (1). Corresponde (2) a um enfraquecimento de 0,947 db ou 0,109 nep.

Como, porém, o enfraquecimento, provocado por um padrão dessa natureza, depende da freqüência (3), êste inconveniente fêz com que caísse em desuso.

Resumo dos factores em conversão

Multiplicar:	Por:	Para achar:
Dd	0,1151	Nep
Dd	1,056	Milhas de cabo normal
Milhas de cabo normal	0,947	Db
Milhas de cabo normal	0,109	Nep
Nep	8,686	Db
Nep	9,175	Milhas de cabo normal

As unidades logarítmicas também podem usar-se para medida de *grandeza absoluta*, e não apenas relativa, desde que se fixe uma referência, dita *nível de referência* (ou *nível zero*).

O decibel utiliza-se, assim, freqüentemente, para medir *potência*. Deve, todavia, pôr-se em evidência que muita confusão tem resultado da falta de normalização do nível de referência ou nível zero, P_0. Com efeito, têm sido largamente usados todos os seguintes:

1 mW (em 600 ohms)
6 mW (em 600 ohms e em 500 ohms)
10 mW (em 600 ohms)
12,5 mW (em 600 ohms)

O primeiro (1 m W em 600 ohms) tende hoje a normalizar-se em radiotècnia, ao passo que o segundo (6 m W em 600 ohms) se normaliza em telecomunicações por fios.

A indicação da impedância faz-se para o caso em que haja necessidade de comparar correntes ou tensões desenvolvidas em impedâncias diferentes; mas não interessa quando se comparam simplesmente potências.

Dada, pois, *uma potência de* N_{db} ou, como também se diz, *um nível de* N_{db} *referido ao nível zero* P_0, isso significa que:

$$N_{db} = 10 \log_{10} \frac{P}{P_0} \qquad \text{ou} \quad \log_{10} \frac{P}{P_0} = \frac{N_{db}}{10}$$

---

(1) Antigo cabo americano de calibre 19.

(2) À freqüência de 800 Hz. O enfraquecimento quantitativo de 0,947 db aplicava-se às outras freqüências e chamava-se «milha de 800 ciclos».

(3) À freqüência de 886 Hz, o enfraquecimento provocado por uma milha de cabo normal é tal que $P_1/P_2 = 10^{0,1}$, ou seja, $10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 10 \times 0,1 = 1$. É o enfraquecimento que hoje se chama decibel.

Resulta:

$$P = P_0 \times \text{antilog}_{10} \frac{N_{db}}{10}$$

Seja $N_{db} = 30$ db e $P_0 = 1$ mW $= 0{,}001$ W; a potência que correspode ao nível será:

$$P = 0{,}001 \times \text{antilog}_{10} \frac{30}{10} = 0{,}001 \times 1000 = 1 \text{ W}$$

Confirma-se, dêste modo, que, fixado o nível zero, qualquer nível em decibels equivale a um valor absoluto de potência.

Apresentam-se agora exemplos numéricos do uso do decibel, que é a unidade logarítmica mais vulgarizada.

Imagine-se que, na impedância terminal dum sistema eléctrico, a corrente é de 1 mA, e que, devido à inserção de qualquer elemente novo no sistema, a corrente baixou para 0,3 mA. Como a impedância terminal não variou, $P_1 | P_2 = (I_1 | I_2)^2$; pode, pois, usar-se a expressão em função das correntes:

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{1.0}{0.3} = 20 \times 0{,}5023$$
$$= 10{,}46 \text{ db de perda ou enfraquecimento.}$$

Suponha-se, ao contrário, que o elemento novo introduzido no sistema foi um amplificador, e que, em resultado da sua acção, a corrente na impedância terminal subiu para 5 mA. Ter-se-á:

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{1}{5} = 20 \times (-0{,}7) \text{ (1)}$$
$$= -14 \text{ db de perda}$$
$$= 14 \text{ db de ganho.}$$

De acôrdo com a citada propriedade dos logaritmos, segundo a qual o logaritmo de qualquer número é igual e de sinal contrário ao logaritmo do seu recíproco, é possível usar *sempre* o têrmo maior em numerador, interpretando como ganho o resultado quando êsse valor maior provier da alteração. No exemplo anterior, ter-se-ia:

$$n_{db} = 20 \log_{10} \frac{5}{1} = 20 \times 0{,}7 \text{ (2)}$$
$$= 14 \text{ db de ganho.}$$

Não deve, evidentemente, perder-se de vista que, ao totalizar-se o resultado de alterações sucessivas, perdas e ganhos deverão ser afectados de sinais contrários na adição algébrica que os combina.

O problema inverso — determinar a relação das potências quando é dado o número de decibels — vai agora exemplificar-se.

---

(1) $-0{,}7 = \bar{1},3 = (-1) + (1 - 0{,}7)$.

(2) $\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} 0{,}2 = 1{,}3 = -0{,}7$

$\left(\log a = -\log \frac{1}{a}\right)$

$\log_{10} \frac{5}{1} = \log_{10} 5 = 0{,}7$

Imagine-se que houve uma perda de 18,06 db numa dada impedância; isso significa que

$$10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 18{,}06$$

$$\text{ou} \quad \log_{10} \frac{P_1}{P_2} = 1{,}806$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{antilog } 1.806 = 64$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{64} = 8$$

Considerou-se anteriormente uma alteração de potência (também pode dizer-se uma *alteração de nível*) numa impedância dada, quer dizer num dado ponto; mas as unidades logarítmicas também podem usar-se para indicar uma *diferença de nível* entre dois pontos.

Suponha-se um amplificador com uma entrada de 6 m W em 500 ohms e uma saída de 6 W, Pode dizer-se que o ganho em potência do amplificador é 1000; mas também pode dizer-se que *o ganho* do amplificador é de:

$$n_{db} = 10 \log_{10} 1000 = 20 \text{ db}.$$

Êste número resultou duma comparação de *potências;* é, por conseqüência, *independente das impedâncias* de entrada e de saída. Mas assim como se disse 6 m W em 500 ohms, poder-se-ia ter falado de 1,73 V em 500 ohms, maneira de dizer equivalente. Simplesmente, quando se cita a *tensão* de entrada, torna-se absolutamente *indispensável* especificar a *impedância* nos terminais da qual ela se mede, visto a tensão depender do valor da impedância mesmo que a potência seja a mesma.

O uso de decibels aplicado a amplificadores com *entrada de tensão* [1] apresenta particularidades que convém pôr em evidência.

Aparelhos como microfones e «pick-ups» são equivalentes a um gerador de tensão constante em série com a sua resistência interna equivalente. Se os cálculos não levarem êste facto em conta, induzirão em êrro. Vale a pena demonstra-lo com um exemplo típico.

Considere-se um amplificador com uma entrada de 1 V através de 1 megaohm e uma saída de 2 W numa impedância de utilização de 5000 ohms. A tensão nos terminais desta impedância será:

$$E_2 = \sqrt{2 \text{ W} + 5000 \square} = 100 \text{ V}$$

O ganho em decibels calcular-se-á pela expressão:

$$\begin{aligned} n_{db} &= 20 \log_{10} \frac{E_2}{E_1} + 10 \log_{10} \frac{Z_1}{Z_2} \\ &= 20 \log_{10} 100 + 10 \log_{10} 200 \\ &= 20 \times 2 + 10 \times 2{,}3 \\ &= 63 \text{ db} \end{aligned}$$

---

[1] Amplificadores excitados por uma tensão. Pràticamente não consomem potência apreciável à entrada.

Êste mesmo valor se obteria, evidentemente, se, em vez de se operar sôbre as tensões, se relacionassem as potências de entrada e de saída. À entrada, a potência é $P = (1/10^{-6})\,W = 1\,\mu\,W$; por conseqüência:

$$n_{db} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 10 \log_{10} \frac{2}{10^{-6}} = 10 \log_{10} 2.10^6$$

$$= 10 \times 6{,}3$$

$$= 63 \text{ db}$$

Se, no mesmo amplificador, com a saída de 2 W em 5000 ohms, a tensão de 1 W à entrada fôr desenvolvida em 0,5 megaohm, o cálculo do ganho indicará 60 db.

Ora um «pick-up» de cristal, nas freqüências acústicas centrais, fornece pràticamente a mesma tensão através de impedâncias de 0,5 e 1 megaohm. Por conseqüência *o mesmo* amplificador, trabalhando *com o mesmo* «pick-up», fornece os *ganhos diferentes* de 63 e 60 db só pelo facto de se alterar de 1 para 0,5 megaohm o valor da impedância de entrada.

O *ganho de tensão* de amplificadores refere-se freqüentemente a decibels; mas convém salientar que essa maneira de proceder despreza o segundo termo da expressão:

$$20 \log_{10} \frac{E_2}{E_1} + 10 \log_{10} \frac{Z_1}{Z_2}$$

O ganho de tensão, em decibels, *difere,* pois, *do verdadeiro ganho* do amplificador em decibels, o qual se refere, da definição, a uma relação de potências, a não ser quando $Z_1 = Z_2$. Será, pois, conveniente assinalar que se trata de *decibels de tensão* (1).

Unidades de volume ou de potências (Volume escrito Vu)

Como se assinalou, a fixação do nível de referência, ou nível zero, permite usar as unidades logarítmicas para indicar potência. Mas, para que o resultado tenha significação precisa, torna-se necessário indicar o nível de referência.

Tem-se recentemente generalizado o uso da nova expressão «Unidades de volume, vu», para afectar as indicações de potência em db quando se define, como nível zero, a potência de 1 mW em 600 ohms, que tende a normalizar-se em radiotecnia. Significa isto que:

O nível de volume, ou de potência, em vu é numèricamente igual ao número de db acima do nível de referência de 1 mW em 600 ohms.

Nestas circunstâncias, como a definição da unidade já fixa o nível de referência, não há necessidade de indicá-lo no resultado. E qualquer nível em vu pode converter-se sem ambiguidade na equivalente potência em watts:

$$P_w = 0{,}001 \times \text{antilog}_{10} \frac{N_{vu}}{10}$$

Embora seja pleonástico, chama-se a atenção para o facto que em vu se podem apenas exprimir níveis de volume, ou de potência; sempre que se trate de exprimir rela-

(1) «Decibels of voltage», dbv.

ções tem de usar-se o db (ou qualquer das unidades logarítmicas indicadas); será nomeadamente o caso do ganho dum amplificador ou da perda dum sistema atenuador.

Nota-se que os indicadores de nível electro-acústicos, quando graduados em vu, devem possuir uma resposta, em função de freqüência, que obedeça a características normalizadas, tendentes a levar em conta certas particularidades do ouvido humano.

Valerá talvez a pena abordar mais pormenorizadamente alguns aspectos de aplicação técnica das unidades logarítmicas. Executar-se-á essa tarefa na primeira oportunidade.

TABELA I

DADO: Decibels — **ACHAR: Relações de potências e { de tensões / de correntes**

OBSERVAÇÕES RESPEITANTES AO NÍVEL DE DECIBEL

Para valores positivos (+) do decibel — Ambas as relações de tensões e potências são maiores do que a unidade.
Usar as duas colunas da direita.

Para valores negativos (—) do decibel—Ambas as relações de tensões e potências são menores do que a unidade.
Usar as duas colunas da esquerda.

Exemplo — *Dado:* ± 9.1 db *Achar:*

	Relação de potências	*Relação de tensões*
+ 9.1 db	8.128	2.851
— 9.1 db	0.1230	0.3508

— db + ← →				
Relação de tensões	*Relação de potências*	*db*	*Relação de tensões*	*Relação de potências*
1.0000	**1.0000**	**0**	**1.000**	**1.000**
.9886	.9772	.1	1.012	1.023
.9772	.9550	.2	1.023	1.047
.9661	.9333	.3	1.035	1.072
.9550	.9120	.4	1.047	1.096
.9441	.8913	.5	1.059	1.122
.9333	.8710	.6	1.072	1.148
.9226	.8511	.7	1.084	1.175
.9120	.8318	.8	1.096	1.202
.9016	.8128	.9	1.109	1.230
.8913	**.7943**	**1.0**	**1.122**	**1.259**
.8810	.7762	1.1	1.135	1.288
.8710	.7586	1.2	1.148	1.318
.8610	.7413	1.3	1.161	1.349
.8511	.7244	1.4	1.175	1.380
.8414	.7079	1.5	1.189	1.413
.8318	.6918	1.6	1.202	1.445
.8222	.6761	1.7	1.216	1.479
.8128	.6607	1.8	1.230	1.514
.8035	.6457	1.9	1.245	1.549
.7943	**.6310**	**2.0**	**1.259**	**1.585**
.7852	.6166	2.1	1.274	1.622
.7762	.6026	2.2	1.288	1.660
.7674	.5888	2.3	1.303	1.698
.7586	.5754	2.4	1.318	1.738
.7499	.5623	2.5	1.334	1.778
.7413	.5495	2.6	1.349	1.820
.7328	.5370	2.7	1.365	1.862
.7244	.5248	2.8	1.380	1.905
.7161	.5129	2.9	1.396	1.950

— db + ← →				
Relação de tensões	*Relação de potências*	*db*	*Relação de tensões*	*Relação de potências*
.7079	**.5012**	**3.0**	**1.413**	**1.995**
.6998	.4898	3.1	1.429	2.042
.6918	.4786	3.2	1.445	2.089
.6839	.4677	3.3	1.462	2.138
.6761	.4571	3.4	1.479	2.188
.6683	.4467	3.5	1.496	2.239
.6607	.4365	3.6	1.514	2.291
.6531	.4266	3.7	1.531	2.344
.6457	.4169	3.8	1.549	2.399
.6383	.4074	3.9	1.567	2.455
.6310	**.3981**	**4.0**	**1.585**	**2.512**
.6237	.3890	4.1	1.603	2.570
.6166	.3802	4.2	1.622	2.630
.6095	.3715	4.3	1.641	2.692
.6026	.3631	4.4	1.660	2.754
.5957	.3548	4.5	1.679	2.818
.5888	.3467	4.6	1.698	2.884
.5821	.3388	4.7	1.718	2.951
.5754	.3311	4.8	1.738	3.026
.5689	.3236	4.9	1.758	3.090
.5623	**.3162**	**5.0**	**1.778**	**3.162**
.5559	.3090	5.1	1.799	3.236
.5495	.3020	5.2	1.820	3.311
.5433	.2951	5.3	1.841	3.388
.5370	.2884	5.4	1.862	3.467
.5609	.2818	5.5	1.884	3.548
.5248	.2754	5.6	1.905	3.631
.5188	.2692	5.7	1.928	3.715
.5129	.2630	5.8	1.950	3.802
.5070	.2570	5.9	1.972	3.890

TABELA I (continuação)

Relação de tensões	Relação de potências	db	Relação de tensões	Relação de potências
		— db +		
		←	→	
.5012	.2512	6.0	1.995	3.981
.4955	.2455	6.1	2.018	4.074
.4898	.2399	6.2	2.042	4.166
.4842	.2344	6.3	2.065	4.269
.4786	.2291	6.4	2.089	4.365
.4732	.2239	6.5	2.113	4.467
.4677	.2188	6.6	2.138	4.571
.4624	.2138	6.7	2.163	4.677
.4571	.2089	6.8	2.188	4.786
.4519	.2042	6.9	2.213	4.898
.4467	.1995	7.0	2.239	5.012
.4416	.1950	7.1	2.265	5.129
.4365	.1905	7.2	2.291	5.248
.4315	.1862	7.3	2.317	5.370
.4266	.1820	7.4	2.344	5.495
.4217	.1778	7.5	2.371	5.623
.4169	.1738	7.6	2.399	5.754
.4121	.1698	7.7	2.427	5.888
.4074	.1660	7.8	2.455	6.026
.4027	.1622	7.9	2.483	6.166
.3981	.1585	8.0	2.512	6.310
.3936	.1549	8.1	2.541	6.457
.3890	.1514	8.2	2.570	6.607
.3846	.1479	8.3	2.600	6.761
.3802	.1445	8.4	2.630	6.918
.3758	.1413	8.5	2.661	7.079
.3715	.1380	8.6	2.692	7.244
.3673	.1349	8.7	2.723	7.413
.3631	.1318	8.8	2.754	7.586
.3589	.1288	8.9	2.786	7.762
.3548	.1259	9.0	2.818	7.943
.3508	.1230	9.1	2.851	8.128
.3467	.1202	9.2	2.884	8.318
.3428	.1175	9.3	2.917	8.511
.3388	.1148	9.4	2.951	8.710
.3350	.1122	9.5	2.985	8.913
.3311	.1096	9.6	3.020	9.120
.3273	.1072	9.7	3.055	9.333
.3236	.1047	9.8	3.090	9.550
.3199	.1023	9.9	3.126	9.772

Relação de tensões	Relação de potências	db	Relação de tensões	Relação de potências
		— db +		
		←	→	
.3162	.1000	10.0	3.162	10.000
.3126	.09772	10.1	3.199	10.23
.3090	.09550	10.2	3.236	10.47
.3055	.09333	10.3	3.273	10.72
.3020	.09120	10.4	3.311	10.96
.2985	.08913	10.5	3.350	11.22
.2951	.08710	10.6	3.388	11.48
.2917	.08511	10.7	3.428	11.75
.2884	.08318	10.8	3.467	12.02
.2851	.08128	10.9	3.508	12.30
.2818	.07943	11.0	3.548	12.59
.2786	.07762	11.1	3.589	12.88
.2754	.07586	11.2	3.631	13.18
.2723	.07413	11.3	3.673	13.49
.2692	.07244	11.4	3.715	13.80
.2661	.07079	11.5	3.758	14.13
.2630	.06918	11.6	3,802	14.45
.2600	.06761	11.7	3.846	14.79
.2570	.06607	11.8	3.890	15.14
.2541	.06457	11.9	3.936	15.49
2.512	.06310	12.0	3.981	15.85
.2483	.06166	12.1	4.027	16.22
.2455	.06026	12.2	4.074	16.60
.2427	.05888	12.3	4.121	16.98
.2399	.05754	12.4	4.169	17.38
.2371	.05623	12,5	4.217	17.78
.2344	.05495	12.6	4.266	18.20
.2317	.05370	12.7	4.315	18.62
.2291	.05248	12.8	4.365	19.05
.2265	.05129	12.9	4.416	19.50
.2239	.05012	13.0	4.467	19.95
.2213	.04898	13.1	4.519	20.40
.2188	.04786	13.2	4.571	20.89
.2163	.04677	13.3	4.624	21.38
.2138	.04571	13.4	4.677	21.88
.2113	.04467	13.5	4.732	22.39
.2089	.04365	13.6	4.786	22.91
.2065	.04266	13.7	4.842	23.44
.2042	.04169	13.8	4.898	23.99
.2018	.04074	13.9	4.955	24.55

TABELA I (continuação)

← −db + →				
Relação de tensões	*Relação de potências*	*db*	*Relação de tensões*	*Relação de potências*
.1995	**.03981**	**14.0**	**5.012**	**25.12**
.1972	.03890	14.1	5.070	25.70
.1950	.03802	14.2	5.129	26.30
.1928	.03715	14.3	5.188	26.92
.1905	.03631	14.4	5.248	27.54
.1884	.03548	14.5	5.309	28.18
.1862	.03467	14.6	5.370	28.84
.1841	.03388	14.7	5.433	29.51
.1820	.03311	14.8	5.495	30.20
.1799	.03236	14.9	5.559	30.90
.1778	**.03162**	**15.0**	**5.623**	**31.62**
.1758	.03090	15.1	5.689	32.36
.1738	.03020	15.2	5.754	33.11
.1718	.02951	15.3	5.821	33.88
.1698	.02884	15.4	5.888	34.67
.1679	.02818	15.5	5.957	35.48
.1660	.02754	15.6	6.026	36.31
.1641	.02692	15.7	6.095	37.15
.1622	.02630	15.8	6.166	38.02
.1603	.02570	15.9	6.237	38.90
.1585	**.02512**	**16.0**	**6.310**	**39.81**
.1567	.02455	16.1	6.383	40.74
.1549	.02399	16.2	6.457	41.69
.1531	.02344	16.3	6.531	42.66
.1514	.02291	16.4	6.607	43.65
.1496	.02239	16.5	6.683	44.67
.1479	.02188	16.6	6.761	45.71
.1462	.02138	16.7	6.839	46.77
.1445	.02089	16.8	6.918	47.86
.1429	.02042	16.9	6.998	48.98
.1413	**.01995**	**17.0**	**7.079**	**50.12**
.1396	.01950	17.1	7.161	51.29
.1380	.01905	17.2	7.244	52.48
.1365	.01862	17.3	7.328	53.70
.1349	.01820	17.4	7.413	54.95
.1334	.01778	17.5	7.499	56.23
.1318	.01738	17.6	7.586	57.54
.1303	.01698	17.7	7.674	58.88
.1288	.01660	17.8	7.762	60.26
.1274	.01622	17.9	7.852	61.66

← −db + →				
Relação de tensões	*Relação de potências*	*db*	*Relação de tensões*	*Relação de potências*
.1259	**.01585**	**18.0**	**7.943**	**63.10**
.1245	.01549	18.1	8.035	64.57
.1230	.01514	18.2	8.128	66.07
.1216	.01479	18.3	8.222	67.61
.1202	.01445	18.4	8.318	69.18
.1189	.01413	18.5	8.414	70.79
.1175	.01380	18.6	8.511	72.44
.1161	.01349	18.7	8.610	74.13
.1148	.01318	18.8	8.710	75.86
.1135	.01288	18.9	8.811	77.62
.1112	**.01259**	**19.0**	**8.913**	**79.43**
.1109	.01230	19.1	9.016	81.28
.1096	.01202	19.2	9.120	83.18
.1084	.01175	19.3	9.226	85.11
.1072	.01148	19.4	9.333	87.10
.1059	.01122	19.5	9.441	89.13
.1047	.01096	19.6	9.550	91.20
.1035	.01072	19.7	9.661	93.33
.1023	.01047	19.8	9.772	95.50
.1012	.01023	19.9	9.886	97.72
.1000	**.01000**	**20.0**	**10.000**	**100.00**

← −db + →				
Relação de tensões	*Relação de potências*	*db*	*Relação de tensões*	*Relação de potências*
3.162×10^{-1}	10^{-1}	**10**	**3.162**	**10**
10^{-1}	10^{-2}	10	10	10^{2}
3.162×10^{-2}	10^{-3}	20	3.162×10	10^{3}
10^{-2}	10^{-4}	30	10^{2}	10^{4}
3.162×10^{-3}	10^{-5}	50	3.162×10^{2}	10^{5}
10^{-3}	10^{-6}	60	10^{3}	10^{6}
3.162×10^{-4}	10^{-7}	70	3.162×10^{3}	10^{7}
10^{-4}	10^{-8}	80	10^{4}	10^{8}
3.162×10^{-5}	10^{-9}	90	3.162×10^{4}	10^{9}
10^{-5}	10^{-10}	**100**	10^{5}	10^{10}

TABELA II

DADO: Relações de { tensão / corrente } ACHAR: Decibels

RELAÇÃO DE POTENCIAS

Para achar o número de decibels correspondente a uma dada relação de potências — Considerar a relação de potências dada como uma relação de tensões e procurar o número de decibels correspondente.

O resultado desejado é exactamente metade do número de decibels encontrado.

Exemplo — *Dado:* uma relação de potências igual a 3,41.

Procurar 3,41 na tabela:

$$3{,}41 \rightarrow 10{,}655 \text{ db} \times \frac{1}{2} = 5{,}328 \text{ db}$$

Relação de tensões	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
1.0	.000	.806	.172	.257	.341	.424	.506	.588	.668	.749
1.1	.828	.906	.984	1.602	1.138	1.214	1.289	1.364	1.437	1.511
1.2	1.584	1.656	1.727	1.798	1.868	1.938	2.007	2.076	2.144	2.212
1.3	2.279	2.345	2.411	2.477	2.542	2.606	2.671	2.734	2.798	2.860
1.4	2.923	2.984	3.046	3.107	3.167	3.227	3.287	3.346	3.405	3.464
1.5	3.522	3 580	3.637	3.694	3.750	3.807	3.862	3.918	3.973	4,028
1.6	4.082	4.137	4.190	4.244	4.297	4.350	4.402	4.454	4.506	4.558
1.7	4.609	4.660	4.711	4.761	4.811	4.861	4.910	4.959	5.008	5.057
1.8	5.105	5.154	5.201	5.249	5.296	5.343	5.390	5.437	5.483	5.529
1.9	5.575	5.621	5.666	5.711	5.756	5.801	5.845	5.889	5.933	5.977
2.0	6.012	6.064	.6107	.6150	6.193	6.235	6.277	6.319	6.361	6.403
2.1	6.444	6.486	6.527	.6568	6.608	6.649	6.689	6.729	6.769	6.809
2.2	6.848	6.888	6.297	6.966	7.008	7.044	7.082	7.121	7.159	7.197
2.3	7.235	7.272	7.310	7.347	7.384	7.421	7.458	7.495	7.532	8.568
2.4	7.604	7.640	7.676	7.712	7.748	7.783	7.819	7.854	7.889	7 924
2,5	7.959	7.993	8.028	8.062	8.097	8.131	8.165	8.199	8.232	8.266
2.6	8.299	8 333	8.366	8.399	8.432	8.465	8.498	8.530	8.563	8.595
2.7	8.627	8.659	8.691	8.723	8.755	8.787	8.818	8.850	8.881	8.912
2.8	8.943	8.974	9.005	9.036	9.066	9.097	9.127	9.158	9.188	9.218
2.9	9.248	9.278	9.308	9.337	9.367	9.396	9.426	9.455	9.484	9.513
3.0	9.542	9.571	9.600	9.629	9.657	9.686	6.714	6.743	9.771	9.799
3.1	9.827	9.855	9.883	9.911	9.939	9.996	9.994	10.021	10.049	10.076
3.2	10.103	10.130	10.157	10.184	10.211	10.238	10.264	10.291	10.317	10.344
3.3	10.370	10.397	10.423	10.449	10.475	10.501	10.527	10.553	10.578	10.604
3.4	10.630	10.655	10.681	10.706	10.731	10.756	10.787	10.807	10.832	10.857
3.5	10.881	10.906	10.931	10.995	10.980	11.005	11.029	11.053	11.078	11.102
3.6	11.126	11.150	11.174	11.198	11.222	11.246	11.270	11.293	11.317	11.341
3.7	11.364	11.387	11.411	11.434	11.457	11.481	11.504	11.527	11.550	11.573
3.8	11.596	11.618	11.641	11.664	11.687	11.709	11.732	11.754	11.777	11.799
3.9	11.821	11.844	11.866	11.888	11.910	11.932	11.954	11.976	11.998	12.019

TABELA II (continuação)

Relação de tensões	00.	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
4.0	12.041	12.063	12.085	12.106	1 .128	12.149	12.171	12.192	12.213	12.234
4.1	12.256	12.277	12.298	12.319	12.340	12.361	12.382	12.403	12.424	12.444
4.2	12.465	12.486	12.506	12.527	12.547	12.568	12.588	12.609	12.629	12.649
4.3	12.699	12.690	12.710	12.730	12.750	12.770	12.790	12.810	12.829	12.849
4.4	12.869	12.889	12.908	12.928	12.948	12.967	12.987	13.006	12.026	13.045
4.5	13.064	13.084	13.103	13.122	13.141	13.160	13.179	13.198	13 217	13.326
4.6	13.255	13.274	13.293	13.312	13.330	13.349	13.368	13.386	13.405	13.423
4.7	13.442	13.460	13.479	13.497	13.516	13.534	13.552	13.570	13.589	13.607
4.8	13.625	13.643	13.661	13.679	13.697	13.715	13.733	13.751	13.768	13.786
4.9	13.804	13.822	13.839	13.857	13.875	13.892	13.910	13.927	13.945	13.962
5.0	13.979	13.997	14.014	14.031	14 049	14.066	14.083	14.100	14.117	14.134
5.1	14.151	14.168	14.185	14.202	14.219	14.236	14.253	14.270	14.287	14.303
5.2	14.320	14.337	14.353	14.370	14.387	14.403	14.420	14.436	14.453	14.469
5.3	14.486	14.502	14.518	14.535	14.551	14.567	14.583	14.599	14.616	14.632
5.4	14.648	14.664	14.680	14.696	14.712	14.728	14.744	14.760	14.776	14.791
5.5	14.807	14.823	14.839	14.855	14.870	14.886	14.902	14.917	14.933	14.948
5.6	14.964	14 879	14.995	15.010	15.026	15.041	14.056	15.072	15.087	15.102
5.7	15.117	15.133	14.148	15.163	15.178	15.193	14.208	15.224	15.239	15.254
5.8	15.269	15.284	14.298	15.313	15.328	15.343	14.358	15.373	15.388	15.402
5.9	15.417	15.432	14.446	15.461	15.476	15.490	14.505	15.519	15.534	15.549
6.0	15.563	15.577	15.592	15.606	15.621	15.635	15.649	15.664	15.678	15.692
6.1	15.707	15.721	15.735	15.749	15.763	15.778	15.792	15.806	15.820	15.834
6.2	15.848	15.862	15.876	15.890	15.904	15.918	15.931	15.945	15.959	15.973
6.3	15.987	16.001	16.014	15.028	16.042	16.055	16.069	16.083	16.096	16.110
6.4	15.124	16.137	16.151	15.164	16.178	16.191	16.205	16.218	61.232	16.245
6.5	16.258	16.272	16.285	16.298	16.312	16.325	16.338	16.351	16.365	16.378
6.6	16.391	16.404	16.417	16.430	16.443	16.456	16.469	16.483	16.496	16.509
6.7	16.521	16.534	16.547	16.560	16.573	16.586	16.599	16.612	16.625	16.637
6.8	16.650	16.663	16.676	16.688	16.701	16.714	16.726	16.739	16.752	16.764
6.9	16.777	16.790	16.802	16.815	16.827	16.840	16.852	16.865	16.877	16.890
7.0	16.902	16.914	16.927	16.939	16.951	16.964	16.976	16.988	17.001	17.031
7.1	17.025	17.037	17.050	17.062	17.074	17.086	17.098	17.110	17.122	17.135
7.2	17.147	17.159	17.171	17.183	17.195	17.207	17.219	17.231	17.243	17.255
7.3	17.266	17.278	17.290	17.302	17.314	17.326	17.338	17.349	17.361	17.373
7.4	17.385	17.396	17.408	17.420	17.431	17.443	17.455	17.466	17.478	17.490
7.5	17.501	17.513	17.524	17.536	17.547	17.559	17.570	17.582	17.593	17.605
7.6	17.616	17.628	17.639	17.650	17.662	17.673	17.685	17.696	17.707	17.719
7.7	17.730	17.741	17.752	17.764	17.775	17.786	17.797	17.808	17.820	17.831
7.8	17.842	17.853	17.864	17.875	17.886	17.897	17.908	17.919	17.931	17.942
7.9	17.953	17.964	17.975	17.985	17.996	17.007	18.018	18.029	18.040	18.051

TABELA II (continuação)

Relação de tensões	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
8.0	**18.062**	**18.073**	**18.083**	**18.094**	**18.105**	**18.116**	**18.127**	**18.137**	**18.148**	**18.159**
8.1	18.170	18.180	18.191	18.202	18.212	18.223	18.234	18.244	18.255	18.266
8.2	18.276	18.287	18.297	18.308	18.319	18.329	18.340	18.350	18.361	18.371
8.3	18.382	18.392	18.402	18.413	18.423	18.434	18.444	18.455	18.465	18.475
8.4	18.486	18.496	18.506	18.517	18.527	18.537	18.547	18.558	18.568	18.578
8.5	18.588	18.599	18.609	18.619	18.629	18.639	18.649	18.660	18.670	18.680
8.6	18.690	18.700	18.710	18.720	18.730	18.740	18.750	18.760	18.770	18.780
8.7	18.790	18.800	18.810	18.820	18.830	18.840	18.850	18.860	18.870	18.880
8.8	18.890	18.900	18.909	18.919	18.929	18.939	18.949	18.958	18.968	18.978
8.9	18.988	18.998	19.007	19.017	19.027	19.036	19.046	19.056	19.066	19.075
9.0	**19.085**	**19.094**	**19.104**	**19.114**	**19.123**	**19.133**	**19.143**	**19.152**	**19.162**	**19.171**
9.1	19.181	19.190	19.200	19.209	19.219	19.228	19.238	19.247	19.257	19,265
9.2	19.276	19.285	19.295	19.304	19.313	19.323	19.332	19.342	19.351	19.360
9.3	19.370	19.379	19.388	19.398	19.407	19.416	19.426	19.435	19.444	19.453
9.4	19.463	19.472	19.481	19.490	19.499	16.509	19.518	19.527	19.536	19.545
9.5	19.554	19.564	19.573	19.582	19.591	19.600	19.609	19.618	19.627	19.636
9.6	19.645	19.654	19.664	19.673	19.682	19.691	19.700	19.709	19.718	19.726
9.7	19.735	19.744	19.753	19.762	19.771	19.780	19.789	19.798	19.807	19.816
9.8	19.825	19.833	19.842	19.851	19.860	19.869	19.878	19.886	19.895	19.904
9.9	19.913	19.921	19.930	19.939	19.948	19.956	19.965	19.974	19.983	19.991

Relação de tensões	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	**20.000**	**20.828**	**21.584**	**22.279**	**22.923**	**23.522**	**24.082**	**24.609**	**25.105**	**25.575**
20	26.021	26.444	26.848	27.235	27.604	27.959	28.299	28.627	28.943	29.248
30	29.542	29.827	30.103	30.370	30.630	30.881	31.126	31.364	31.596	31.821
40	32.041	32.256	32.465	32.669	32.869	33.064	33.255	33.442	33.625	33.804
50	33.979	34.151	34.320	34.486	34.648	34.807	34.964	35.117	35.269	35.417
60	35.563	35.707	35.848	35.987	36.124	36.258	36.391	36.521	36.650	36.777
70	36.902	37.025	37.147	37.266	37.385	37.501	37,616	37.730	37.842	37.953
80	38.062	38.170	38.276	38.382	38.486	38.588	38.690	38.790	38.890	38.988
90	39.085	39.181	39.276	39.370	39.463	39.554	39.645	39.735	39.825	39.913
100	**40.000**	—	—	—	—	—	—	—	—	—

TABELAS RESUMIDAS

$\frac{P_1}{P_2} = R$	*db*	$\frac{P_1}{P_2} = 10\ R$	*db*	$\frac{P_1}{P_2} = 10^2\ R$	*db*	$\frac{P_1}{P_2} = 10^3\ R$	*db*
1	0	10	10,00	100	20,00	1000	30,00
2	3,01	20	13,01	200	23,01	2000	33,01
3	4,77	30	14,77	300	24,77	3000	34,77
4	6,02	40	16,02	400	26,02	4000	36,02
5	6,99	50	16,99	500	26,99	5000	36,99
6	7,78	60	17,78	600	27,78	6000	37,78
7	8,45	70	18,45	700	28,45	7000	38,45
8	9,03	80	19,03	800	29,03	8000	39,03
9	9,54	90	19,54	900	29,54	9000	39,54
10	10,00	100	20,00	1000	30,00	10^4	40,00

$\frac{I_1}{I_2} = R$	*db*	$\frac{I_1}{I_2} = 10\ R$	*qp*	$\frac{I_1}{I_2} = 10^2\ R$	*qp*	$\frac{I_1}{I_2} = 10^3\ R$	*db*
1	0	10	10,00	100	40,00	1000	60,00
2	6,02	20	26,02	200	46,02	2000	66,02
3	9,54	30	29,54	300	49,54	3000	69,54
4	12,04	40	32,04	400	52,04	4000	72,04
5	13,98	50	33,98	500	53,98	5000	73,98
6	15,56	60	35,56	600	55,56	6000	75,56
7	16,90	70	36,90	700	56,90	7000	76,90
8	18,06	80	38,06	800	58,06	8000	78,06
9	19,08	90	39,08	900	59,08	9000	79,08
10	20,00	100	40,00	1000	60,00	10^4	80,00

Valores > 1		*db*	*Valores < 1*	
Rel. de amplit.	*Rel. de potências*		*Rel. de potências*	*Rel. de amplit.*
1	1	0	1	1
1,122	1,259	1	0,794	0,891
1,259	1,585	2	0,631	0,794
1,413	1,995	3	0,501	0,707
1,585	2,512	4	0,398	0,631
1,778	3,162	5	0,316	0,562
1,995	3,981	6	0,251	0,501
2,239	5,012	7	0,199	0,447
2,512	6,310	8	0,158	0,398
2,818	7,943	9	0,126	0,354
3,162	10	10	0,1	0,3162
10	100	20	0,01	0,1
31,62	1000	30	0,001	0,03162
100	10000	40	0,0001	0,01
316,2	10^5	50	10^{-5}	0,003162
1000	10^6	60	10^{-6}	0,001

Uma simplificação ao traçado das linhas de influência de certos efeitos, em arcos encastrados[1]

PELO ENG.º CIVIL (U. P.) DANIEL MARIA VIEIRA BARBOSA

Todos sabemos o interêsse que tem no estudo de certas estruturas e, muito especialmente, no estudo das pontes, o traçado das linhas de influência; compreende-se, assim, a vantagem que traz ao engenheiro qualquer simplificação nos métodos correntemente seguidos, razão justificativa do estudo que se segue.

Seja o sistema três vezes hiperstático que é um arco encastrado nas nascenças, esclarecendo-se desde já que neste elemento construtivo não olho a forma como característica primordial: considero como arco tôda e qualquer estrutura que, sob a acção de cargas verticais, produz reacções oblíquas nos apoios; assim se aceita que o seu eixo ou directriz possa ser uma linha qualquer, inclusivamente formada por porções rectas buscando apoio em pilares extremos, ou seja um pórtico.

Grande número de autores estabelecem fórmulas que permitem determinar as linhas de influência para os momentos e esforços axiais e transversos ($\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$) numa qualquer das suas secções; cálculos analíticos, mais ou menos complicados, permitem, partindo delas, determinar as referentes às secções restantes.

Mesmo aquêles que preconizam os métodos de integração gráfica para a resolução, senão de todo, pelo menos de parte do problema, não conseguem subtrair o projectista a um trabalho exaustivo e, muitas vezes, deveras complicado.

Parece-me possível evitar tais inconvenientes, adoptando um processo gráfico extremamente simples para o traçado das linhas de influência e que, para mais, se apresenta com o aspecto de grande generalidade.

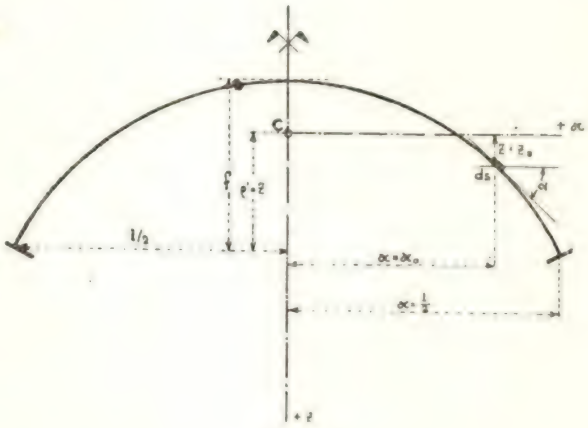


Fig. 1

O leitor pode cingir-se à «Pratique du Calcul du béton armé — 3.ᵉ partie — Calcul des arcs», do Prof. Magnel, para melhor acompanhar o raciocínio que se segue.

Consideremos um arco simétrico, encastrado, de corda l e de flecha f e, no seu plano, um sistema de eixos coordenados Cx, Cz cuja origem coïncide com o seu centro elástico (fig. 1).

Partindo duma solicitação qualquer e, por exemplo, escrevendo as expressões do trabalho de deformação do arco e atendendo ao 2.º teorema de Castigliano, é fácil chegar às expressões para as linhas de influência dos $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ na secção do fecho; são elas:

---

[1] Dum trabalho em preparação *Cálculo das pontes, em arco, de alvenaria, betão e betão armado.*

1) — Linhas de influência para fôrças verticais:

$$\overline{T} = \frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{1}$$

$$\overline{N} = - \frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z\,x}{I} ds + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\Omega} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{2}$$

$$\overline{M} = \overline{N}\,(f - \rho') + \frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I} - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}} \tag{3}$$

2) — Linhas de influência para fôrças horizontais:

$$\overline{T} = \frac{\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\,z}{I} ds - z_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\Omega} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{4}$$

$$\overline{N} = \frac{z_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{5}$$

$$\overline{M} = \overline{N}\,(f - \rho') - \frac{z_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I} - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}} \tag{6}$$

Da forma do arco se deduz a função $z = \varphi(x)$; sendo x a variável de integração, exprimir-se-á *ds* como $\frac{dx}{\cos \alpha}$.

O considerar, ou não, nestas fórmulas os termos em *sen* α e em *cos* α depende, naturalmente, do tipo do arco de que se trate; num arco abatido, por exemplo, os termos em $cos^2\,\alpha$ podem ser de grande importância, embora sejam, naturalmente, desprezáveis os termos em $sen^2\,\alpha$.

Num arco em forma de pórtico, porém, nem uns nem outros podem ser, por princípio, sistemàticamente desprezados, visto depender da inclinação da secção considerada em relação à vertical do fêcho o critério a adoptar: numa secção inclinada de 45°, por exemplo, os termos em $\text{sen}^2\,\alpha$, $\cos^2\alpha$ e $\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$ podem ter importância de relêvo nas expressões dos $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$ e $\overline{T}_i$ (1).

Nos arcos muito abatidos, nem sempre é legítimo desprezar as deformações por esfôrço cortante, o que conduz às expressões:

$$\overline{T} = \frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I}\,ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I}\,ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\Omega}\,ds - \frac{E}{G}\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I}\,ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\Omega}\,ds + \frac{E}{G}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds} \tag{7}$$

$$\overline{N} = -\frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I}\,ds - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x\,z}{I}\,ds - \frac{E-G}{G}\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\Omega}\,ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I}\,ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds + \frac{E}{G}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\Omega}\,ds} \tag{8}$$

$$\overline{M} = \overline{N}\,(f - \varrho') + \frac{x_0 \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I} - \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I}\,ds}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}} \tag{9}$$

E e G representam os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente.

Observe-se que por x_0 se designa o valor limite inferior de x, variável cujo valor limite superior é $\frac{1}{2}$: a abscissa do ponto de aplicação de $P = 1$; x refere a abscissa corrente dum ponto qualquer do arco carregado em x_0.

Quere dizer que $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}}$ representa a integração no intervalo $x_0 - \frac{1}{2}$ e, $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}$ representa a integração estendida a todo o arco.

Estamos, assim, em face de dois integrais distintos; os do denominador, de limites constantes, e os do numerador, de limites variáveis.

Por z_0 representa-se a ordenada do ponto de aplicação de $P = 1$, referindo z a ordenada corrente dum outro ponto qualquer do arco carregado em z_0.

---

(1) Magnel diz considerar desprezáveis, em todos os casos práticos, os termos em *sen* α; esta generalização, tal como Magnel a estabelece, só tem cabimento quando por arco se denominam genèricamente, dentro das estruturas consideradas, as de forma curva com tangentes, nas origens, de grande inclinação; o exemplo do cálculo numérico dum pórtico, de que Magnel se serve para demonstração prática do seu processo de integração, seria incompatível com a generalização feita.

Cada autor procura um processo de integração mais original ou mais simples; seja por via analítica, seja por via gráfica, a integração é sempre trabalhosa e só ao fim de contas laboriosas se encontram as linhas de influência dos $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ na secção do fecho e, deduzidas destas por um cálculo estático, extenso, as linhas de influência em qualquer outra secção.

Método proposto

a) *Determinação dos $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$*

Antes de tratar, pròpriamente, da determinação dos $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$ e $\overline{T}_i$ em qualquer secção depois de conhecidos os $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ na secção do fecho, vejamos alguma coisa àcêrca da determinação dêstes por meio duma integração gráfica; o processo que vou seguir baseia-se, essencialmente, na consideração dos pesos elásticos e não tem, por isso mesmo, originalidade.

Simplesmente porque nele se apresentam certas simplificações, que me parecem práticas, julgo de interêsse expô-lo.

Faremos o cálculo dos integrais por quadratura, substituíndo-os por somatórios, onde os *ds* passam a ΔS que representam, assim, os comprimentos das partes em que se considera o arco dividido, e que podem ser constantes ou variáveis mas sempre tão pequenos quanto possível.

No caso da fig. 2, a divisão fez-se, simètricamente, em 10 partes, representando-se por um número a posição do centro de gravidade da secção média correspondente.

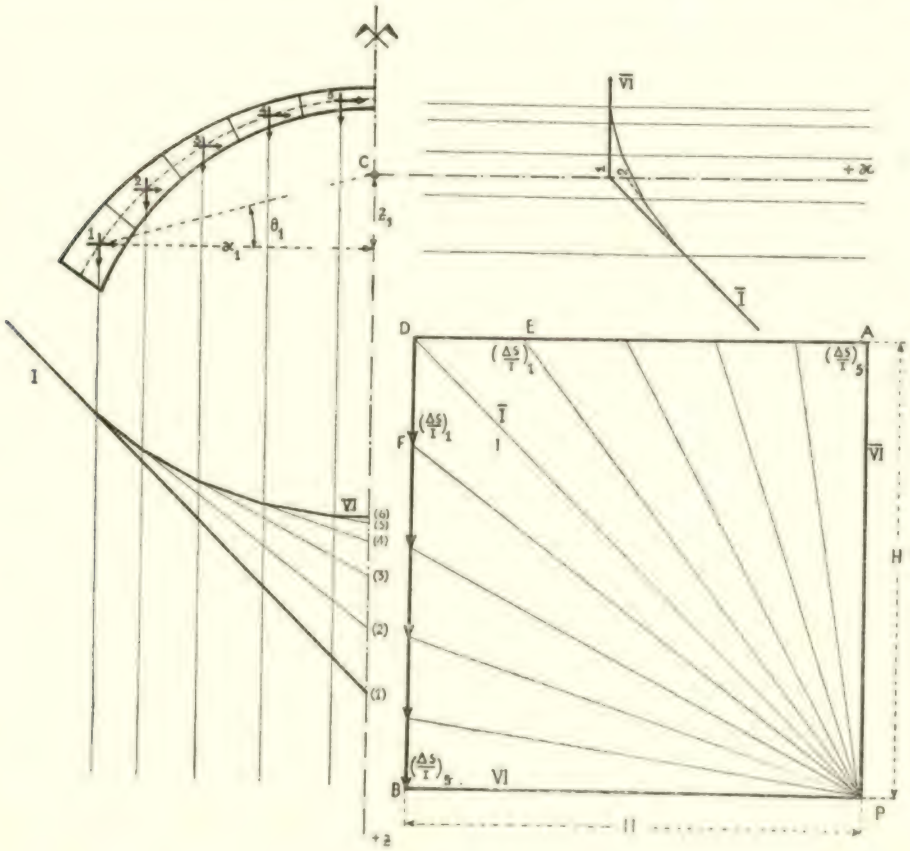


Fig. 2

Consideram-se actuando nos diferentes pontos 1, 2, 3..... 10, os pesos $\frac{\Delta S}{I}$ respectivos e que designaremos por $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1, \left(\frac{\Delta S}{I}\right)_2 \ldots\ldots \left(\frac{\Delta S}{I}\right)_{10}$, construíndo-se dois dinâmicos de tal modo que as direcções das fôrças sejam paralelas aos eixos Cx e Cz e obrigando-os a uma mesma distância polar H. Quere dizer que os lados I e $\overline{I}$ são coïncidentes com a bissectriz do ângulo $\widehat{ADB}$.

A determinação do centro elástico C do arco é assim, como se sabe, imediata e porque para cada um dos troços de comprimento ΔS, conhecemos os valores de Ω e I da respectiva secção média, bem como as coordenadas x e z do seu centro de gravidade, (consideradas positivas ou negativas, conforme as convenções que se adoptem) ficamos a conhecer as relações $\frac{\Delta S}{\Omega}$, $\frac{\Delta S}{I}$ e tg θ.

Preenche-se, de seguida, a parte do quadro de cálculo correspondente às características do arco, ou sejam as colunas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

As colunas *5* e *6* dão-nos os valores dos $\frac{\Delta S}{I}$ parciais e totais parciais, respectivamente; quere dizer, os valores parciais correspondentes aos pontos 1, 2, 3, 4, 5 e às resultantes dos valores correspondentes aos pontos 1, 1 e 2, 1 e 2 e 3, etc.

Cada valor da coluna *6* representa o $\sum_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta S}{I}$ por que se substituíu o $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}$ e que diz respeito à resultante de tôdas as fôrças à esquerda do ponto de abscissa x_0 (1); o valor da coluna *6*, linha *e* refere a resultante do meio arco, igual à soma dos valores parciais $\frac{\Delta S}{I}$ da coluna *5*, linha *f*, e que representaremos por $R_{\overline{k}}$. O valor da mesma coluna, linha *g*, diz respeito à resultante para todo o arco e corresponde ao $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}$; representa-se por R_k.

Nas colunas *10* a *19* apontam-se os valores necessários ao cálculo das expressões que permitem determinar os $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$.

Os valores $\overline{(1)-(2)}$ H, $\overline{(2)-(3)}$. H, $\overline{(3)-(4)}$. H,..... representam os momentos estáticos dos pesos elásticos $\frac{\Delta S}{I}$, correspondentes aos pontos 1, 2, 3...., e em relação ao eixo Cz; referem-se na coluna *10*. Os totais parciais, referidos na coluna *11*, representam, para cada secção, os valores dos $\sum_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta S}{I}$ x por que se substituíram os $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I}$ ds.

Os valores relativos à linha *g*, ou sejam os correspondentes a todo o arco, são nulos ($A_k = 0$) visto o eixo Cz ser um eixo baricêntrico.

Não há necessidade de medir, no eixo Cx, os valores interceptados pelos lados sucessivos do funicular correspondente para se determinarem os respectivos momentos estáticos; com efeito, dada a igualdade dos triângulos D E P e D F P (fig. 2) e a semelhança com os triângulos Q (1) (2) — eixo C Z — e S (1) (2) — eixo Cx — conclui-se que

$$\frac{\overline{(1)-(2)}}{x_1} = \frac{\overline{(\overline{1})-(\overline{2})}}{z_1}$$

(1) Não nos preocupamos, por agora, com a questão dos sinais, pelo que consideramos o meio arco da esquerda como se se tratasse do meio arco da direita.

donde $$\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{M}_1 \operatorname{tg} \theta_1$$

designando por $\mathfrak{M}'_1$ o momento estático do pêso elástico $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1$ em relação a Cx e por $\mathfrak{M}_1$ o momento estático do pêso elástico $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)$ em relação a Cz.

O mesmo se concluía para os momentos parcelares restantes.

Assim se preencheram as colunas *12* e *13*, em que os totais se estabeleceram de modo semelhante aos totais parciais anteriores.

O valor da coluna *13*, linha *e*, igual ao da *12*, linha *f*, representa o somatório $\sum_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta S}{I} z = C_k$ por que substituímos o $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds$; são nulos, naturalmente, os valores correspondentes ao arco todo (linha *g*).

Os integrais do tipo $\int \frac{x^2}{I} ds$ e $\int \frac{z^2}{I} ds$ ou, no caso considerado, os somatórios $\Sigma \frac{\Delta S}{I} x^2$ e $\Sigma \frac{\Delta S}{I} z^2$ referem momentos de inércia dos pesos $\frac{\Delta S}{I}$ em relação aos eixos Cz e Cx, respectivamente.

Atendendo à semelhança dos triângulos dos dois polígonos funiculares, conclui-se que

$$I'_1 = I_1 \operatorname{tg}^2 \theta_1$$

e assim sucessivamente.

Por outro lado não chega a haver necessidade da determinação de qualquer momento de inércia na construção gráfica feita, o que obrigava a medir uma área se quiséssemos aplicar o método de Mohr, por exemplo; de facto, porque o momento de inércia dum qualquer pêso $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_i$ é dado pela relação

$$I_i = \frac{\mathfrak{M}_i^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_i}$$

o momento de inércia dum sistema de pesos $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1$, $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_2$, $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_3$, por exemplo, será

$$I = \sum_{i=3}^{1} \frac{\mathfrak{M}_i^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_i} = \frac{\mathfrak{M}_1^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1} + \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_2} + \frac{\mathfrak{M}_3^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_3}$$

Assim se preencheram as colunas *14*, *15*, *16* e *17* de tal modo que qualquer valor da *15* representa o $\sum_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta S}{I} x^2$ por que substituímos o $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds$ correspondente; os valores da coluna *17* dizem respeito aos $\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds$.

O valor referido na coluna *15*, linha *e*, igual ao da *14*, linha *f*, diz respeito ao $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds \left(B_k = \sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} x^2\right)$, dando-nos o da coluna *14*, linha *g*, o relativo ao $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds$.

O mesmo se diria para os momentos de inércia em relação ao eixo Cx (colunas *16* e *17*).

Claro que se os $\mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$ da coluna *12* representam momentos estáticos parciais dos pesos elásticos $\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_i$ considerados, os produtos $x_i \mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$ representarão os momentos centrífugos parciais dos mesmos pesos (coluna *18*).

Os seus totais parciais — coluna *19* — dizem portanto respeito aos integrais

$$\int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{x z}{I} ds \qquad \left(\sum_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\Delta S}{I} x z = S\right)$$

de tal modo que o valor referido na coluna *19*, linha *e*, igual ao da coluna *18*, linha *f*, diz respeito ao $\int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{x z}{I} ds$.

Naturalmente que quando estes integrais, ou somatórios correspondentes, se estendessem a todo o arco, o valor encontrado tem de ser zero visto os eixos Cz e Cx serem eixos principais de inércia.

Como disse, pode haver necessidade de considerar no estudo dum arco os termos $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds$, $\int \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds$, $\int \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\Omega} ds$, se o traçado do seu eixo assim o justificar.

Uma integração gráfica permite encontrar, ràpidamente, os valores procurados.

Seja um meio arco (fig. 3) e nêle uma direcção $X_i X_i$ perpendicular à tangente em n_i (centro de gravidade da secção média do troço considerado de comprimento ΔS); marque-se sôbre $X_i X_i$ um segmento η_i, de comprimento qualquer, que consideraremos como igual à unidade.

A direcção $X_i X_i$ faz com a vertical por n_i, $Y_i Y_i$, o ângulo α que a tangente ao arco, por n_i, faz com a horizontal; o ângulo α que entra nos integrais.

Sendo assim, $\overline{AB} = \cos \alpha_i$, visto considerarmos $\eta_i = 1$; $\overline{AD} = \cos^2 \alpha_i$, $\overline{DC} = \operatorname{sen}^2 \alpha_i$ e $\overline{DB} = \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i$; basta multiplicar, para cada secção, os valores dos segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ e $\overline{DB}$, pelos $\frac{ds}{\Omega}$ correspondentes para obtermos, respectivamente, os valores $\int \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds$, $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds$ e $\int \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\Omega} ds$.

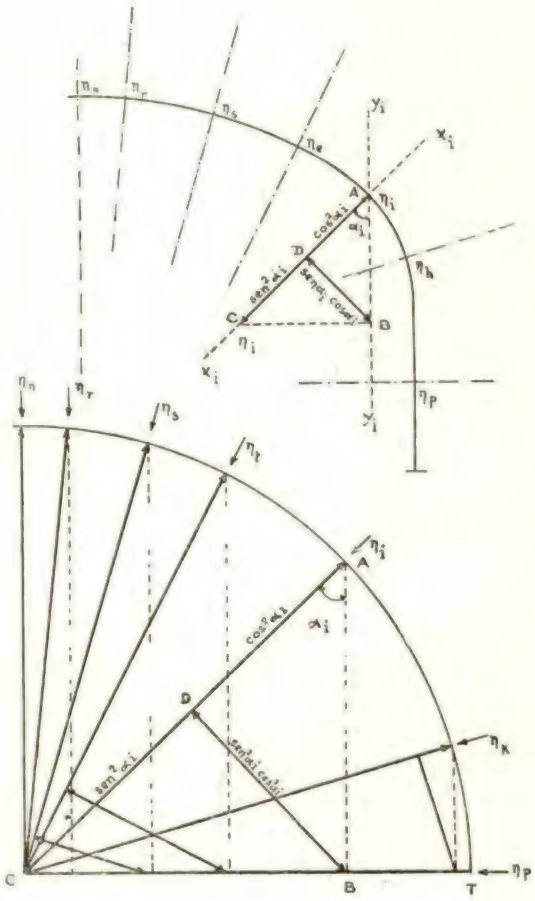


Fig. 3

Pode dispensar-se a construção gráfica sôbre o arco, desde que se considere um quarto de círculo, de raio $\overline{CT} = 1$; basta tirar, por C, rectas paralelas às direcções normais às

tangentes nas secções consideradas (AC), pelos pontos de intercepção destas rectas com o arco de círculo baixar perpendiculares sôbre CT e, por B, tirar uma perpendicular sôbre AC que determina o ponto D.

Os valores de $\text{sen}^2 \alpha_i$, $\cos^2 \alpha_i$ e $\text{sen}\, \alpha_i \cos \alpha_i$, determinam-se imediatamente; na fig. 3 a construção está feita para os pontos n_n, n_r, n_s, n_t, n_i, n_k, e n_p mostrando como para o primeiro e último só os valores de $\cos^2 \alpha$ e $\text{sen}^2 \alpha$ interessam, respectivamente.

As colunas *20* a *28*, do quadro II, permitem o cálculo rápido dos valores procurados.

Há, naturalmente, todo o interêsse em traçar as perpendiculares ao eixo do arco com o maior rigor possível; o facto de na sua maioria as curvas adoptadas para o eixo serem circulares, elípticas ou parabólicas, permite o seu traçado com satisfatória aproximação.

Casos excepcionais levariam à determinação das tangentes por via analítica ou, por outras palavras, à determinação analítica dos termos em α; é, de resto, um princípio a atender o ver até que ponto o êrro cometido permite a integração gráfica.

O processo seguido é, como se vê, de carácter geral para os arcos simétricos encastrados, qualquer que seja a sua forma; a fig. 4 refere o traçado gráfico para um arco em forma de pórtico que permite a determinação de todos os valores precisos para preenchimento dos quadros I e II, que levam ao cálculo dos $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ pelas expressões:

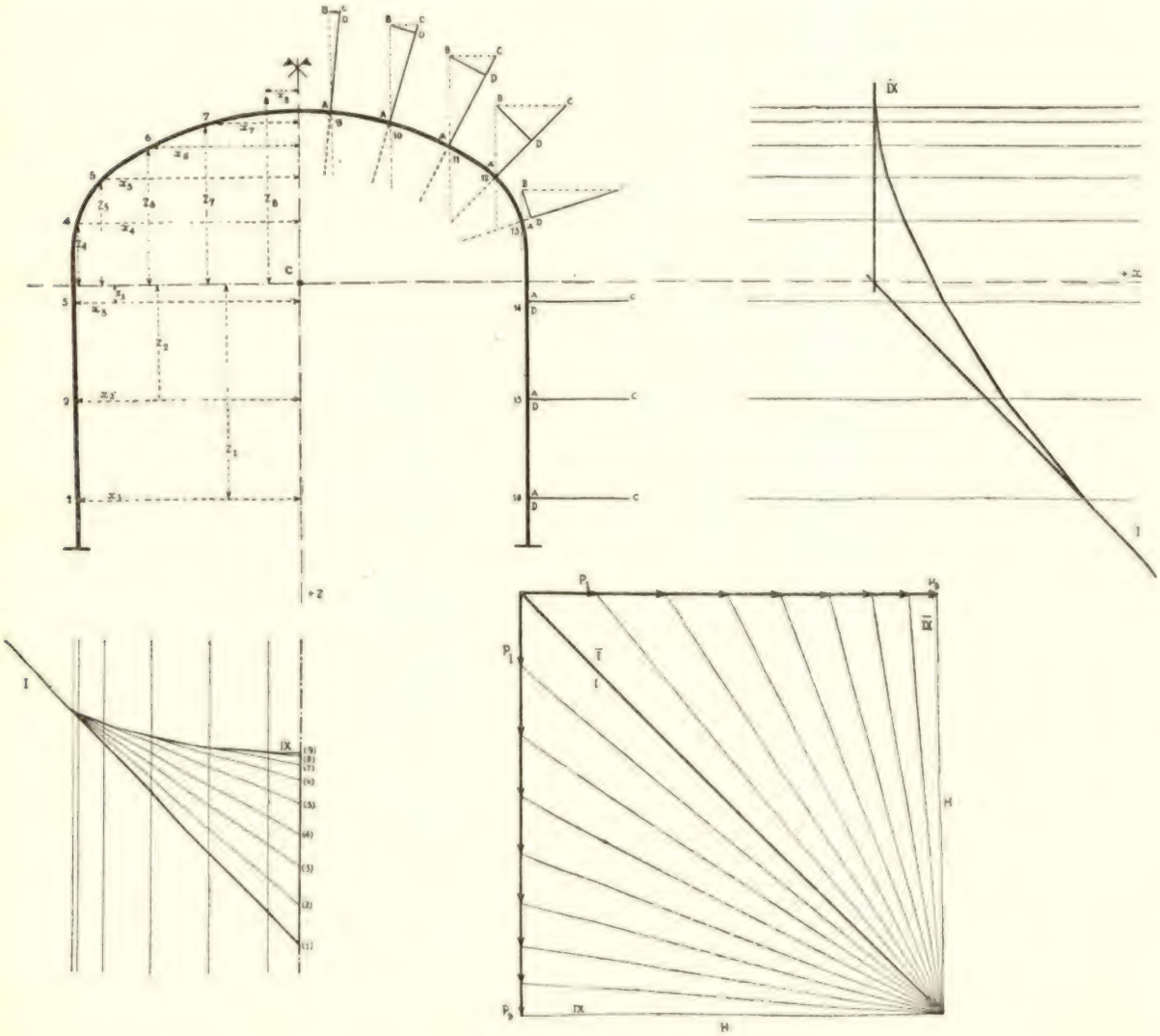


Fig. 4

1) Cargas verticais

$$\overline{T} = \frac{(8) \times (11) - (15) - \boxed{(25)}}{B_k + \boxed{\mathcal{J}_k}}$$

$$\overline{N} = -\frac{(8) \times (13) - (19) + \boxed{(28)}}{D_k + \boxed{F_k}}$$

$$\overline{M} = \overline{N}(f - \rho') + \frac{(8) \times (6) - (11)}{R_k}$$

2) Cargas horizontais

$$\overline{T} = \frac{(19) - (7) \times (11) - \boxed{(28)}}{B_k + \boxed{\mathcal{J}_k}}$$

$$\overline{N} = \frac{(7) \times (13) - (17) - \boxed{(22)}}{D_k + \boxed{F_k}}$$

$$\overline{M} = \overline{N}(f - \rho') - \frac{(7) \times (6) - (13)}{R_k}$$

Os termos contidos no sinal $\boxed{}$ referem-se às funções de α, a considerar em casos especiais.

Como já se disse, torna-se necessário, nos arcos muito abatidos, considerar a deformação por esfôrço cortante e, sendo assim, as expressões dos $\overline{T}$, $\overline{N}$ e $\overline{M}$ passam a escrever-se

$$\overline{T} = \frac{(8) \times (11) - (15) - \frac{E}{G}(22)}{B_k + \frac{E}{G} F_k}$$

$$\overline{N} = -\frac{(8) \times (13) - (19)}{D_k + F_k}$$

$$\overline{M} = \overline{N}(f - \rho') + \frac{(8) \times (6) - (11)}{R_k}$$

Desprezamos, neste caso, todos os termos em *sen* α. (colunas *23* a *28*).

Os quadros de cálculo, tal como estão elaborados, permitem a determinação de outras incógnitas hiperstáticas; por exemplo:

3) — Efeito do deslocamento dum dos encastramentos:

Suponhamos um deslocamento da secção de encastramento, composto duma rotação $\Delta\varphi$ e de deslocamentos vertical e horizontal, respectivamente Δx e Δy (êste último medido no sentido do eixo Cz, tomando como origem o posição de encastramento à cota ρ').

Seguindo, ainda, as fórmulas citadas pelo Prof. Magnel, teremos para valores das reacções que nela se desenvolvem (vertical, horizontal e momento, respectivamente):

$$P_e = \frac{\frac{1}{2} E \Delta \varphi - E \Delta y}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{10}$$

$$Q_e = - \frac{\rho' E \Delta \varphi + E \Delta x}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{11}$$

$$M_e = \frac{1}{2} P_e - \rho' Q_e + \frac{E \Delta \varphi}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}} \tag{12}$$

Os quadros de cálculo I e II permitem determinar estas hiperstáticas mediante as expressões

$$P_e = \frac{\frac{1}{2} E \Delta \varphi - E \Delta y}{B_k + \boxed{\mathcal{J}_k}}$$

$$Q_e = - \frac{E (\rho' \Delta \varphi + \Delta x)}{D_k + \boxed{F_k}}$$

$$M_e = \frac{1}{2} P_e - \rho' Q_e + \frac{E \Delta \varphi}{R_k}$$

Os termos contidos no sinal $\boxed{}$ referem-se às funções de α a considerar em casos especiais.

4) — Efeito duma variação de temperatura t:

O valor do impulso é dado por

$$Q_t = \frac{E \delta t l}{\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{I} ds + \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} ds} \tag{13}$$

que permite determinar o momento em qualquer ponto do arco pela expressão

$$M_i = - Q_t z_i$$

Baseando-nos nos quadros de cálculo I e II podemos escrever

$$Q_t = \frac{E\,\delta\,t\,l}{D_k + \boxed{F_k}}$$

$$M_i = -\,Q_t \times (7)$$

O termo contido no sinal $\square$ refere-se a uma função de α, a considerar em casos especiais.

Observe-se, ainda, que se contém nos quadros de cálculo I e II os termos necessários para a determinação de linha de influência do impulso dum arco com duas articulações, por exemplo, e que são dadas pelas expressões:

Cargas verticais

$$\overline{Q} = \frac{-\int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{x\,(\varrho' - z)}{I}\,ds + x_0 \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{(\varrho' - z)^2}{I}\,ds + \left(\frac{l}{2} - x_0\right) \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\varrho' - z}{I}\,ds - \boxed{\int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{\Omega}\,ds}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{(\varrho' - z)^2}{I}\,ds + \boxed{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds}} \qquad (14)$$

Cargas horizontais

$$\overline{Q} = \frac{(\varrho' - z_0) \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\varrho' - z}{I}\,ds - \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{(\varrho' - z)^2}{I}\,ds - (\varrho' - z) \int_{x_0}^{\frac{l}{2}} ds - \boxed{\int_{x_0}^{\frac{l}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds}}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{(\varrho' - z)^2}{I}\,ds + \boxed{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\cos^2\alpha}{\Omega}\,ds}} + 1 \qquad (15)$$

Os termos contidos no sinal $\square$ referem-se às funções de α, a considerar em casos especiais.

No caso de se considerar uma carga uniforme, vertical, cobrindo metade da corda $\left(p\,\frac{l}{2}\right)$, ou uma carga uniforme horizontal estendendo-se na altura da flecha dum arco simétrico encastrado, aparecem nas expressões que permitem o cálculo das hiperstáticas no fecho (ver fórmulas do Prof. Magnel) alguns termos diferentes dos que constam dos quadros I e II.

Sejam, por exemplo, integrais do tipo

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^3}{I}\,ds \qquad \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{z^3}{I}\,ds \qquad \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 z}{I}\,ds$$

Os integrais $\int \frac{x^3}{I}\,ds$ representam momentos de terceira ordem dos pesos elásticos $\frac{ds}{I}$ em relação ao eixo Cz; os $\int \frac{z^3}{I}\,ds$ representam momentos de terceira ordem também, dos mesmos pesos, em relação ao eixo Cx.

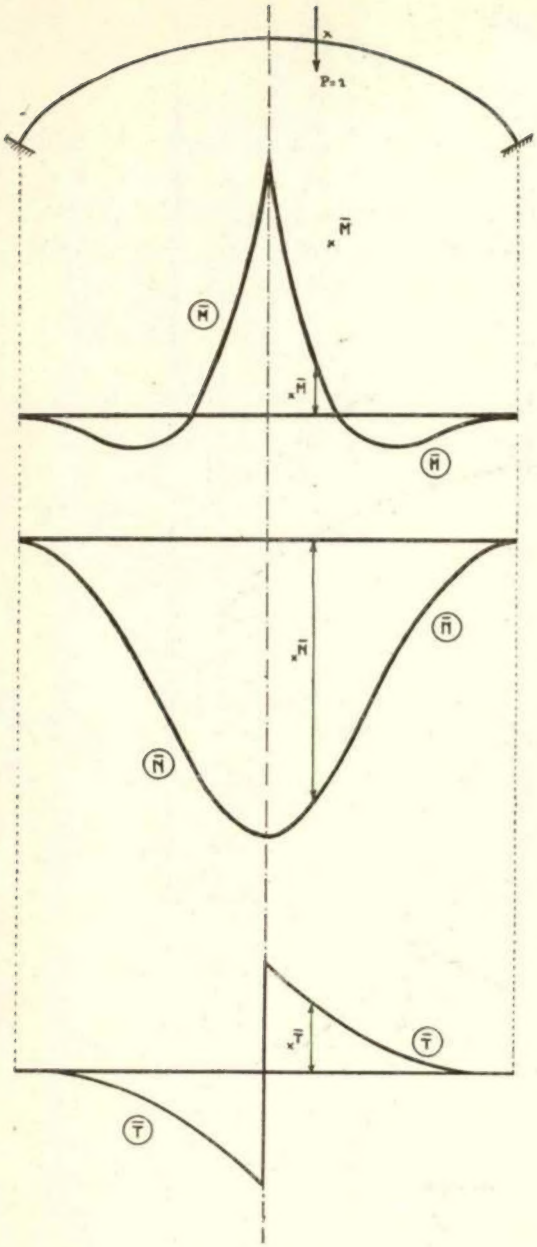


Fig. 5

As relações

$$\mathcal{D}_i = \frac{\mathcal{M}_i^3}{\left(\frac{ds}{I}\right)_i^2} \text{ ou } \mathcal{J}_i = I_i\, x_i$$

permitem o cálculo dos momentos de terceira ordem pelas colunas *8* e *14* ($I_i\, x_i$) e 7 e *16* ($I_i\, t_g^2\, \theta_i\, z_i$).

Os $\int \frac{x^2 z}{I}\, ds$ representam momentos estáticos dum momento centrífugo em relação ao eixo C z e podem ser determinados, portanto, combinando os valores das colunas *8* e *18* ($x_i^2\, \mathcal{M}_i\, t_g\, \theta_i$).

b) *Traçado das linhas de influência para qualquer secção do arco depois de determinadas as correspondentes à secção do fecho* ($\overline{M}$, $\overline{N}$ *e* $\overline{T}$) *ou a qualquer outra.*

Determinadas as linhas de influência dos $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ (fig. 5), ou noutra qualquer secção distinta da do fecho, simples relações estáticas permitem a determinação das linhas de influência para as secções restantes; o seu cálculo é, porém, deveras trabalhoso e, mesmo quando organizado segundo a mecanização proposta por Magnel, não conseguimos fugir a centenas e centenas de operações: num arco dividido em 20 secções teríamos de realizar mais de 1700 contas entre multiplicações e adições para encontrar todos os $\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$ e $\overline{T}_i$ procurados.

Vamos ver que um simples traçado gráfico resolve completamente o problema, na sua maior generalidade.

Suponhamos que queremos determinar as ordenadas das linhas de influência dos M, N e T na secção y quando a carga unitária actua na secção X (fig. 6).

O facto de conhecermos prèviamente as linhas de influência numa secção qualquer, permite-nos o traçado das reações para P = 1 actuando em X e, conseqüentemente, a resolução do problema [1].

De facto, se $_x\overline{N}$ e $_x\overline{T}$ são conhecidos para a secção do fecho quando P = 1 actua na secção X (ordenadas medidas nas linhas de influência da fig. 5), conhecemos a direcção R_e da reação do encastramento esquerdo bem como o seu valor $\overline{R}_e$ (fig. 6): tudo se resume a uma simples composição vectorial que permite, igualmente, a determinação da direcção, grandeza e sentido da reacção do encastramento direito (R_d e $\overline{R}_d$).

[1] Adoptam-se as seguintes notações — Para os $\overline{M}$, $\overline{N}$ e $\overline{T}$ (ordenadas das linhas de influência) um índice à esquerda indica o ponto de aplicação de P = 1; um índice à direita indica a secção a que as hiperstáticas se referem; a ausência do índice à direita diz respeito às hiperstáticas no fecho. Por exemplo: $_x\overline{M}$ indica o valor do momento no fecho quando P = 1 actua na secção X; $_x\overline{M}_y$ indica o valor do momento na secção Y quando P = 1 actua na secção X.

A posição do funicular vem marcada pelo conhecimento do valor de

$$_x\overline{e} = \frac{_x\overline{M}}{_x\overline{N}}$$

que permite a determinação dum ponto de passagem *a* da linha de acção da reacção esquerda, por exemplo.

As ordenadas das linhas de influência dos $_x\overline{M}_y$, $_x\overline{N}_y$ e $_x\overline{T}_y$ (na secção Y para P = 1 actuando em X) determinam-se, agora, imediatamente: basta traçar uma circunferência

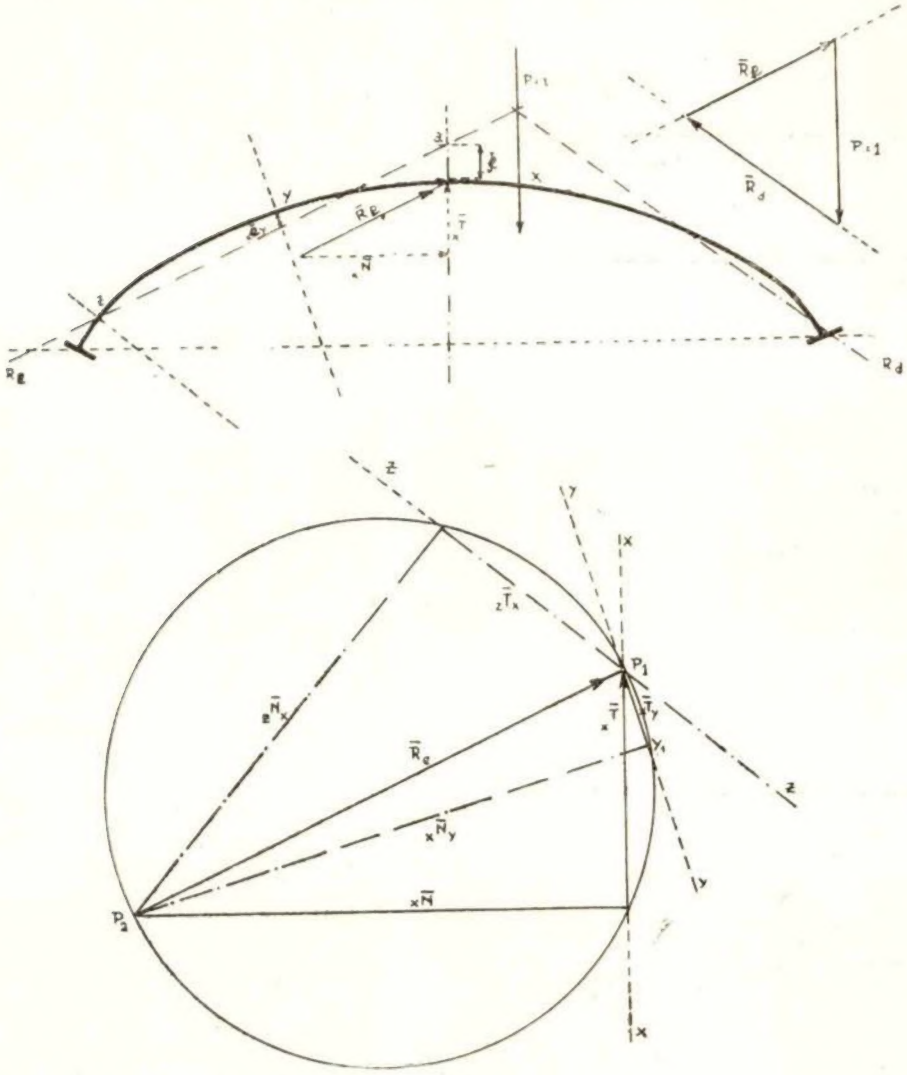


Fig. 6

(fig. 6) de diâmetro $\overline{R}_e$ e pelo ponto P_1 (intercepção dum diâmetro paralelo a R_e), tirar uma recta Y Y paralela à normal à tangente ao arco em Y, unindo, depois, o ponto de intercepção Y_1, desta parelela com a circunferência, ao ponto P_2.

$\overline{P_2\,Y_1}$ e $\overline{P_1\,Y_1}$ medem, à escala de $\overline{R}_e$, os valores de $_x\overline{N}_y$ e $_x\overline{T}_y$, respectivamente.

Porque se conhece, pelo traçado do funicular ($\overline{R}_e$ 1 $\overline{R}_d$) o valor de $_xe_y$, ficamos a conhecer

$$_x\overline{M}_y = {_x\overline{N}_y} \times {_xe_y}$$

Para qualquer outra secção Z (de $_x\overline{M}_z = 0$, por ser $_xe_z = 0$) a construção é semelhante.

Como se vê êste processo de determinação gráfica dos elementos de redução da solici-

Constantes do arco $\begin{cases} \rho' = \ldots\ldots \\ f = \ldots\ldots \end{cases}$ $\qquad f - \rho' = \ldots\ldots$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	N.º da secção	Comprimentos dos troços — ΔS —	Secções médias — Ω —	$\frac{\Delta S}{\Omega}$	Momentos de inércia — I —	$R = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}$ Parciais	Totais parciais — R —	Ordenadas — z —	Abscissas — x —	tg θ	Momen (Ei Parciais M_i
a	1	ΔS_1	Ω_1	$\left(\frac{\Delta S}{\Omega}\right)_1$	I_1	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1$	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1$	z_1	x_1	tg θ_1	$\overline{(1)-(2)}$. H
b	2	ΔS_2	Ω_2	$\left(\frac{\Delta S}{\Omega}\right)_2$	I_2	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_2$	$\sum_2^1 \frac{\Delta S}{I}$	z_2	x_2	tg θ_2	$\overline{(2)-(3)}$. H
c	3	ΔS_3	Ω_3	$\left(\frac{\Delta S}{\Omega}\right)_3$	I_3	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_3$	$\sum_3^1 \frac{\Delta S}{I}$	z_3	x_3	tg θ_3	$\overline{(3)-(4)}$. H
d	4	ΔS_4	Ω_4	$\left(\frac{\Delta S}{\Omega}\right)_4$	I_4	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_4$	$\sum_4^1 \frac{\Delta S}{I}$	z_4	x_4	tg θ_4	$\overline{(4)-(5)}$. H
e	5	ΔS_5	Ω_5	$\left(\frac{\Delta S}{\Omega}\right)_5$	I_5	$\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_5$	$\sum_5^1 \frac{\Delta S}{I}$	z_5	x_5	tg θ_5	$\overline{(5)-(6)}$. H
f	Totais do meio arco	$\sum_{i=1}^{5} \Delta S_i$	—	—	—	$\sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} = R_{\overline{k}}$ $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}\right)$		—	—	—	$A_{\overline{k}} = \sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} x$ $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds\right)$
g	Totais do arco	$2 \sum_{i=1}^{5} \Delta S_i$	—	—	—	$2 \sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} = R_k$ $\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{ds}{I}\right)$		—	—	—	0

QUADRO I

	Cálculo dos momentos estáticos, de inércia e centrífugos d					
9	10	11	12	13	14	15
	Momentos estáticos (Eixo Cz)		Momentos estáticos (Eixo Cx)		Momentos de inércia (Eixo Cz)	
tg θ	Parciais M_i	Totais parciais $A = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds$	Parciais $\mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$	Totais parciais $C = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds$	Parciais $I_i = \frac{\mathfrak{M}_i^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_i}$	Totais parciais $B = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds$
$\operatorname{tg} \theta_1$	$\overline{(1)-(2)} \cdot H$	$\overline{(1)-(2)} \cdot H$	$\mathfrak{M}_1 \operatorname{tg} \theta_1$	$\mathfrak{M}_1 \operatorname{tg} \theta_1$	$I_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_1}$	I_1
$\operatorname{tg} \theta_2$	$\overline{(2)-(3)} \cdot H$	$\overline{(1)-(3)} \cdot H$	$\mathfrak{M}_2 \operatorname{tg} \theta_2$	$\sum_2^1 \mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$	$I_2 = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_2}$	$I_1 + I_2$
$\operatorname{tg} \theta_3$	$\overline{(3)-(4)} \cdot H$	$\overline{(1)-(4)} \cdot H$	$\mathfrak{M}_3 \operatorname{tg} \theta_3$	$\sum_3^1 \mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$	$I_3 = \frac{\mathfrak{M}_3^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_3}$	$I_1 + I_2 + I_3$
$\operatorname{tg} \theta_4$	$\overline{(4)-(5)} \cdot H$	$\overline{(1)-(5)} \cdot H$	$\mathfrak{M}_4 \operatorname{tg} \theta_4$	$\sum_4^1 \mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$	$I_4 = \frac{\mathfrak{M}_4^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_4}$	$I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
$\operatorname{tg} \theta_5$	$\overline{(5)-(6)} \cdot H$	$\overline{(1)-(6)} \cdot H$	$\mathfrak{M}_5 \operatorname{tg} \theta_5$	$\sum_5^1 \mathfrak{M}_i \operatorname{tg} \theta_i$	$I_5 = \frac{\mathfrak{M}_5^2}{\left(\frac{\Delta S}{I}\right)_5}$	$B_{\overline{k}} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 +$
—	$A_{\overline{k}} = \sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} x$ $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{I} ds\right)$	—	$C_{\overline{k}} = \sum_5^1 \frac{\Delta S}{I} z$ $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z}{I} ds\right)$	—	$B_{\overline{k}} = \sum_5^1 I_i$ $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds\right)$	—
—	0	—	0	—	$B_k = 2 \sum_5^1 I_i$ $\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{x^2}{I} ds\right)$	—